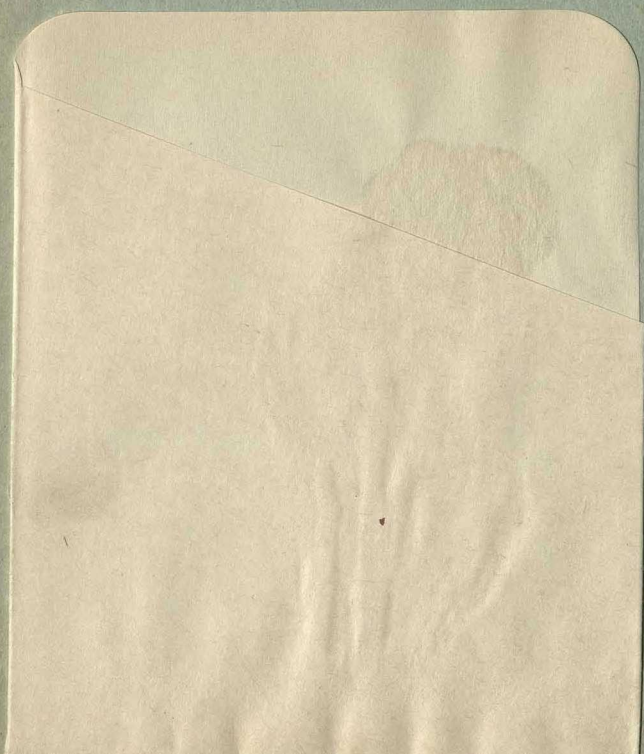


C  $\frac{26}{366}$

32 b. 2



C  $\frac{26}{366}$













С 366  
**ГИМНАЗИЯ  
НА ДОМУ**

X 93  
182

**АРИΘΜΕΤΙΚΑ**

(ВЪ ДВУХЪ ВЫПУСКАХЪ).

[32]

**ВЫПУСКЪ**

2.

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО  
**БЛАГО**  
ПЕТРОГРАДЪ



# НОВОЕ ИЗДАНИЕ „ГИМНАЗИИ НА ДОМУ“

(по отдѣльнымъ предметамъ).

—>—  
ВЫШЛИ ИЗЪ ПЕЧАТИ:

## Ариѳметика (въ 2-хъ выпускахъ):

- № 31. ВЪП. I. Цѣлыя числа. Именованныя числа. Признаки дѣлимости. Нахожденіе общихъ дѣлителей и наименьшаго кратнаго. Упражненія для самопровѣрки.
- № 32. ВЪП. II. Дроби. Отношенія и пропорціи. Тройное правило. Проценты. Учетъ векселей. Правило товарищества. Задачи на смѣшеніе. Справочный отдѣлъ.

## Геометрія (въ 3-хъ выпускахъ):

===== Сокращенный курсъ въ объемѣ высш. нач. училищъ. =====

- № 33. ВЪП. I. Планиметрія. Линіи. Углы. Треугольники. Перпендикуляры и наклонныя. Основныя задачи на построеніе. Параллелограммы и трапеціи. Приложение: Геометрическій задачникъ съ рѣшеніями на всѣ отдѣлы выпуска.
- № 34. ВЪП. II. Планиметрія. Окружность. Дуи, хорды, касательныя. Измѣреніе величинъ. Соизмѣримыя и несоизмѣр. линіи. Измѣреніе угловъ. Вписанныя и описанныя многоугольники. Вычисленіе длины окружности. Измѣреніе площадей. Приложение: Геометрическій задачникъ съ рѣшеніями на всѣ отдѣлы выпуска.
- № 35. ВЪП. III. Стереометрія. Линіи и плоскости въ пространствѣ. Многогранники. Тѣла вращенія. Измѣреніе поверхностей и объемовъ тѣлъ. Практическая геометрія и понятіе о топографическихъ измѣреніяхъ и инструментахъ. Приложение: Геометрическій задачникъ съ рѣшеніями на всѣ отдѣлы выпуска.

## Ариѳметическій задачникъ, съ подробными рѣшеніями.

- № 36. ВЪП. I. Задачи съ рѣшеніями на всѣ отдѣлы ариѳметики до дроби.
- № 37. ВЪП. II. Простыя дроби. Десятичныя дроби. Дробныя именов. числа.

—  
Всѣ руководства спеціально приспособлены для самостоятельныхъ занятій безъ помощи учителя.

Во избѣжаніе недоразумѣній, просимъ при заказѣ указывать, кромѣ названія требуемаго курса и выпуска, также и №, стоящій слѣва.



У  $\frac{93}{182}$  С  $\frac{26}{366}$

# ГИМНАЗИЯ НА ДОМУ



## АРИΘΜΕΤΙΚΑ

(ВЪ ДВУХЪ ВЫПУСКАХЪ).

[32]  
ВЫПУСКЪ  
2.

ОБЩЕСТВЕННАЯ  
БИБЛИОТЕКА  
Директор  
Система  
72

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО

„БЛАГО“

ПЕТРОГРАДЪ

[1918]



Все, сказанное въ «Общихъ указаніяхъ» къ первому выпуску о прохожденіи курса ариѳметики безъ учителя по настоящему руководству, относится также и ко второму выпуску.

## Оглавленіе 2-го выпуска.

### Отдѣлъ IV. Простыя дроби.

	страниц.
Гл. 1. § 27. Происхожденіе дробныхъ чиселъ . . . . .	3— 5
§ 28. Дроби правильныя и неправильныя . . . . .	5— 7
§ 29. Измѣненіе величины дроби . . . . .	7— 9
§ 30. Сокращеніе дробей . . . . .	10
§ 31. Сравненіе дробей . . . . .	10— 12
§ 32. Нахожденіе части по дѣлому . . . . .	12— 13
§ 33. Нахожденіе дѣлаго по его части . . . . .	13— 14
Гл. 2. § 34. Дѣйствія надъ дробями . . . . .	14— 24

### Отдѣлъ V. Десятичныя дроби.

Гл. 1. § 35. Происхожденіе десятичныхъ дробей . . . . .	25
§ 36. Изображеніе десятичной дроби . . . . .	25— 26
§ 37. Измѣненіе величины десятичной дроби . . . . .	26— 28
Гл. 2. § 38. Дѣйствія надъ десятичными дробями . . . . .	28— 32
Гл. 3. § 39. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя . . . . .	33— 37
Гл. 4. § 40. Періодическія дроби . . . . .	37
§ 41. Обращеніе періодическихъ дробей въ обыкновенныя . . . . .	37— 40
Повторительные вопросы и отвѣты . . . . .	40

### Отдѣлъ VI. Теорія пропорцій.

Гл. 1. § 42. Ариѳметическія и геометрическія отношенія . . . . .	41— 44
Гл. 2. § 43. Ариѳметическія и геометрическія пропорціи . . . . .	45— 50
§ 44. Непрерывныя пропорціи . . . . .	50— 52
§ 45. Производныя пропорціи . . . . .	52— 55
§ 46. Сложныя пропорціи . . . . .	55
Повторительные вопросы и отвѣты . . . . .	55— 56

### Отдѣлъ VII. Примѣненіе пропорцій въ ариѳметическихъ задачахъ.

§ 47. Простое тройное правило . . . . .	58— 62
§ 48. Сложное тройное правило . . . . .	62— 64
§ 49. Задачи на проценты . . . . .	65— 77
Учетъ векселей.	
§ 50. Коммерческій учетъ . . . . .	77— 81
§ 51. Математическій учетъ . . . . .	81— 82
§ 52. Задачи на учетъ векселей . . . . .	83— 92
§ 53. Пропорціональное дѣленіе . . . . .	92— 98
§ 54. Задачи на правило товарищества . . . . .	98— 101
§ 55. Задачи на смѣшеніе . . . . .	101— 106
Повторительные вопросы и отвѣты . . . . .	106— 107

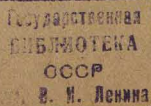
### Приложеніе.

Справочный отдѣлъ . . . . .	108— 112
-----------------------------	----------

Опечатка: въ условіи задачи 2-й, на стран. 59, надо читать 12 работниковъ и 18 работниковъ.



2007466511





# К Н И Г А   И М Е Е Т

Печатн. листов	Выпуск	В перепл. един. соедин. №№ вып.	Таблиц	Карт	Иллюстр.	Служебн. №№№	Списка и порядковый	1955 г.
-------------------	--------	---------------------------------------	--------	------	----------	-----------------	------------------------	---------

7

627/19—250 тыс.

1336

1336

3



no

17



# АРИΘΜΕΤΙΚΑ.

## ОТДѢЛЪ IV.

### ПРОСТЫЯ ДРОБИ.

#### ГЛАВА 1-ая.

#### § 27. Происхожденіе дробныхъ чиселъ.

Всякій отдѣльный предметъ, всякая отдѣльная вещь при счетѣ называется *единицей*, а всякое число, составленное изъ нѣсколькихъ такихъ единицъ, называется *цѣлымъ числомъ*. Поле, аршинъ, человѣкъ, день—все это цѣлыя единицы, а 2 поля, 5 аршинъ, 12 человѣкъ, 7 дней—цѣлыя числа. Мы, однако, знаемъ, что сажень содержитъ 3 аршина, и что каждый аршинъ есть *третья часть*, или *треть* сажени; въ недѣлѣ 7 дней, и каждый день есть *седьмая часть* недѣли. Если двое раздѣлили между собою поровну десятину земли, то каждый изъ нихъ получилъ по *половинѣ*. *Половина, треть, седьмая часть*—это уже будутъ **числа дробныя**, или **дроби**. Дробями они называются потому, что здѣсь цѣлыя единицы *дробятся* на части.

Намъ, напримѣръ, надо узнать длину пола комнаты. Для этого мы беремъ аршинъ и начинаемъ укладывать его по длинѣ пола; пусть аршинъ уложился въ длину 8 разъ, и пусть мы имѣемъ еще остатокъ, въ которомъ аршинъ не укладывается ни разу, т.-е. остатокъ, меньшій аршина. Какъ же измѣрить длину этого остатка? Дѣлимъ аршинъ на шестнадцать частей и начинаемъ укладывать эту *шестнадцатую часть* по длинѣ остатка; пусть она уложится ровно 5 разъ. Послѣ всего этого мы скажемъ, что длина пола равна 8 и пяти шестнадцатымъ аршина; *пять шестнадцатыхъ есть дробь*, образовалась она отъ измѣренія. Всѣ дроби, вообще, происходятъ отъ измѣренія разныхъ величинъ, когда какія-нибудь единицы измѣренія оказываются слишкомъ большими, и ихъ поэтому надо разбить на болѣе мелкія доли.

*Дробью, или дробнымъ числомъ, называется число, составленное изъ одной или нѣсколькихъ долей какой бы то ни было единицы.*

Замѣтимъ здѣсь, что многія доли единицъ сами по себѣ тоже цѣлыя единицы. Такъ, аршинъ по отношенію къ сажени есть дробь (ибо аршинъ—третья доля сажени), но самъ по себѣ аршинъ—цѣлая единица. Взявъ два аршина, мы можемъ сказать, что мы взяли двѣ трети сажени. Выраженіе «два аршина» образуетъ цѣлое число, а выраженіе «двѣ трети сажени» образуетъ дробь; «пять шестнадцатыхъ аршина» — число дробное, но это,



вмѣстѣ съ тѣмъ, и число цѣлое, ибо 5 шестнадцатыхъ аршина составляютъ 5 вершковъ.

Разница между выраженіемъ «5 вершковъ» и выраженіемъ «5 шестнадцатыхъ аршина» та, что въ первомъ говорится только о *количествѣ* долей, а во второмъ указывается, кромѣ того, еще и *происхожденіе* этихъ долей, т.-е. что каждая изъ нихъ произошла отъ дѣленія аршина на шестнадцать равныхъ частицъ. Итакъ, во всякомъ дробномъ числѣ показывается, во-первыхъ,—*на сколько долей раздѣлена единица*, и, во-вторыхъ,—*сколько такихъ долей взято*. Иначе говоря, всякая дробь состоитъ изъ двухъ чиселъ: изъ числа, показывающаго, на сколько долей раздѣлена единица, и называемаго **знаменателемъ**, и изъ числа, показывающаго, сколько такихъ долей взято, и называемаго **числителемъ**.

При изображеніи дроби на письмѣ числитель и знаменатель раздѣляются косою или горизонтальной чертой, при чемъ числитель пишется наверху, а знаменатель—внизу. Напримѣръ, дробь «пять шестнадцатыхъ» изображается такъ:  $\frac{5}{16}$  или  $\frac{5}{16}$ ; «два седьмыхъ»— $\frac{2}{7}$  или  $\frac{2}{7}$ ; «три пятыхъ»— $\frac{3}{5}$  или  $\frac{3}{5}$ .

Положимъ, что нѣкто за 10 фунтовъ кофе заплатилъ 7 рублей; сколько платилъ онъ за 1 фунтъ этого кофе?

Если 10 фунтовъ стоятъ 7 руб., то, очевидно, 1 фунтъ стоитъ въ 10 разъ меньше, т.-е. надо 7 руб. раздѣлить на 10; 7 на 10, однако, не дѣлится, а потому мы разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ 7 меньше 10-ти, и 10 не содержится въ 7-ми даже ни одного раза, то за каждый фунтъ кофе, очевидно, заплачено было меньше одного рубля. Если бы за всѣ 10 фунтовъ заплачено было всего 1 рубль, то каждый фунтъ стоилъ бы *десятую часть* рубля, т.-е.  $\frac{1}{10}$  рубля; но за 10 фунтовъ заплатили на самомъ дѣлѣ 7 руб., слѣдовательно, за каждый фунтъ платили семь разъ по одной десятой рубля, т.-е. *семь десятыхъ* рубля, что можно изобразить дробью  $\frac{7}{10}$ . Итакъ,  $7 : 10$  равняется  $\frac{7}{10}$ . *Отъ дѣленія меньшаго числа на большее въ частномъ получается дробь, числитель которой равенъ дѣлимому (меньшему числу), а знаменатель—дѣлителю (большему числу).*

Мы уже знаемъ, что дробныя числа получаютъ при измѣреніи; теперь же можемъ прибавить, что *дробныя числа получаютъ еще при дѣленіи меньшаго изъ двухъ цѣлыхъ чиселъ на большее*. Напр.:  $3 : 5 = \frac{3}{5}$ ;  $25 : 37 = \frac{25}{37}$ ;  $315 : 672 = \frac{315}{672}$ .

Возьмемъ теперь слѣдующую задачу:

Желѣзнодорожный поѣздъ въ 12 часовъ проходитъ 425 верстъ; по сколько верстъ проходитъ онъ въ 1 часъ?

Въ часъ поѣздъ, понятно, пройдетъ въ 12 разъ меньше верстъ, т.-е.  $425 \text{ верстъ} : 12$ ; но при дѣленіи  $425 : 12$  мы получимъ 35 цѣлыхъ верстъ и еще въ остаткѣ 5 верстъ, которыя нужно раздѣлить на 12. Если бы 1 версту пришлось дѣлить на 12, то мы бы получили  $\frac{1}{12}$ , а при дѣленіи 5 верстъ мы получимъ  $\frac{5}{12}$  версты, т.-е. въ часъ поѣздъ проѣзжаетъ 35 и  $\frac{5}{12}$  верс., или просто  $35\frac{5}{12}$  верс. Число  $35\frac{5}{12}$ , состоящее изъ цѣлой части и приписанной къ ней справа дроби, называется **смѣшаннымъ числомъ**. Итакъ, при дѣленіи двухъ цѣлыхъ чиселъ, не дѣлящихся нацѣло одно на другое, въ частномъ получается дробь или смѣшанное число.



## УПРАЖНЕНИЯ.

Вопросы:

Отвѣты:

1) Прочтите дроби:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{22}{72}$ ,  $\frac{35875}{300000}$ .

1) Одна девятая; семь девярыхъ; двадцать девять семьдесятъ вторыхъ; тридцать пять тысячъ восемьсотъ семьдесятъ пять девяносто тысячныхъ.

2) Напишите дроби: двѣ шестыхъ; три двадцатыхъ; семь сорокъ девярыхъ; шестьдесятъ два восемьсотъ тридцатыхъ; сто двѣсти семьдесятъ пятыхъ; триста двадцать пять тысячныхъ.

2)  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{20}$ ,  $\frac{7}{45}$ ,  $\frac{52}{830}$ ,  $\frac{100}{275}$ ,  $\frac{325}{10000}$ .

3) Напишите частныя отъ дѣленія: 5 на 12; 25 на 72; 78 на 95; 342 на 500; 4315 на 10000.

3)  $\frac{5}{12}$ ,  $\frac{25}{72}$ ,  $\frac{78}{95}$ ,  $\frac{342}{500}$ ,  $\frac{4315}{10000}$ .

4) Какую часть версты составляетъ 1 сажень?—Какую часть версты составляетъ 251 саж.?

4)  $\frac{1}{500}$  часть версты;  $\frac{251}{500}$  часть.

5) Три брата раздѣлили между собой поровну 76 десятинъ земли. Сколько земли получилъ каждый изъ нихъ?

5)  $\frac{76}{3} = 25\frac{1}{3}$  десятины. (Три брата получили 76 дес., а каждый братъ—въ три раза меньше).

## § 28. Дроби правильныя и неправильныя.

Если раздѣлимъ аршинъ на 16 частей, то такихъ шестнадцатыхъ частей въ немъ, очевидно, будетъ 16; если я ежедневно буду тратить по  $\frac{1}{10}$  (одной десятой) части своихъ денегъ, то, понятно, денегъ у меня хватитъ на 10 дней. Вообще, во всякой цѣлой единицѣ имѣются *два половины, три трети, четыре четвертыхъ части, пять пятыхъ частей, двѣнадцать двѣнадцатыхъ* и т. д.

Но если въ одной единицѣ пять пятыхъ частей, то сколько пятыхъ будетъ въ трехъ такихъ единицахъ? Разумѣется, въ 3 раза больше, т. е. пятнадцать пятыхъ:  $1 = \frac{5}{5}$ , а  $3 = \frac{15}{5}$ .

Если въ одной единицѣ девять девярыхъ частей, то въ 10 такихъ единицахъ будетъ въ десять разъ больше:

$$1 = \frac{9}{9}, \text{ а } 10 = \frac{90}{9} \text{ (девятисто девярыхъ).}$$

Разсуждая точно такъ же, получимъ, что  $8 = \frac{36}{9}$  (пятьдесятъ шесть седьмыхъ) и  $12 = \frac{36}{3}$  (тридцать шесть третей).

На этомъ же основаніи всякое цѣлое число можно представить въ видѣ дроби съ какимъ угодно знаменателемъ, при чемъ числитель этой дроби всегда больше ея знаменателя. Такъ, цѣлое число 7 можно представить въ видѣ дробей:  $\frac{21}{3}$ ,  $\frac{28}{4}$ ,  $\frac{49}{7}$ ,  $\frac{56}{8}$  и т. д.; числитель 21 больше знаменателя 3, числитель 49 больше знаменателя 7 и т. д.

Положимъ, что нѣкто купилъ 3 аршина ситцу, заплативъ по 4 коп. за четверть аршина; сколько заплатилъ онъ за всѣ 3 аршина?

Въ одномъ аршинѣ имѣются  $\frac{4}{4}$  (четыре четверти), а въ 3-хъ арш. будетъ въ три раза больше, т. е.  $\frac{12}{4}$  (двѣнадцать четвертей). Если за четверть платили 4 коп., то за 12 четвертей, очевидно, заплатили: 4 коп.  $\times$  12 = 48 к.

Изъ этой задачи видно, что иногда бываетъ весьма полезно представлять



цѣлое число въ видѣ дроби. Измѣнимъ въ этой задачѣ число 3 аршина на  $3\frac{3}{4}$  арш., а всѣ остальные данныя оставимъ тѣ же.

Чтобы узнать, сколько заплачено за  $3\frac{3}{4}$  арш. ситцу, разсуждаемъ такъ. Въ 3-хъ аршинахъ имѣется  $\frac{12}{4}$  (двѣнадцать четвертыхъ); прибавивъ къ этимъ двѣнадцати четвертымъ еще  $\frac{3}{4}$  (три четверти), получимъ всего  $\frac{15}{4}$  (пятнадцать четвертыхъ). За  $\frac{1}{4}$  арш. платили 4 коп.; слѣдовательно, за  $\frac{15}{4}$  заплатили въ 15 разъ больше, т.-е.  $4 \text{ к.} \times 15 = 60 \text{ к.}$

Въ данномъ случаѣ мы убѣдились, что бываетъ также весьма полезно и смѣшанное число представить въ видѣ дроби.

Дробью вообще мы называемъ число, состоящее изъ одной или нѣсколькихъ долей какой-нибудь единицы; всякая дробь поэтому должна быть *меньше единицы*. Но дроби, происшедшія отъ цѣлыхъ или смѣшанныхъ чиселъ, будутъ больше единицы и потому называются **неправильными** **дробями**, въ отличіе отъ дробей, меньшихъ единицы, которыя считаются **правильными**. Дроби:  $\frac{5}{12}$ ,  $\frac{9}{20}$ ,  $\frac{17}{35}$  — будутъ правильными; дроби же:  $\frac{12}{4}$ ,  $\frac{17}{5}$ ,  $\frac{27}{6}$ ,  $\frac{45}{11}$  — будутъ неправильными.

При рѣшеніи задачъ весьма часто приходится смѣшанныя числа представлять въ видѣ неправильныхъ дробей, или, какъ иначе говорятъ еще, **обращать смѣшанныя числа въ неправильныя дроби**. Присматриваясь къ тому, какъ мы  $3\frac{3}{4}$  арш. обращали въ неправильную дробь  $\frac{15}{4}$ , мы замѣтимъ, что сначала обратили 3 цѣлыхъ единицы въ четвертыя доли, т.-е. умножили 3 на 4, а потомъ къ произведенію прибавили еще 3 такихъ четвертыхъ доли. Въ итогѣ мы получили  $\frac{15}{4}$  (пятнадцать четвертыхъ). Отсюда можно вывести слѣдующее правило:

*Чтобы обратить смѣшанное число въ неправильную дробь, надо цѣлую часть его умножить на знаменателя дробной части и къ полученному произведенію прибавить числителя дробной части; полученное послѣ этого число будетъ числителемъ неправильной дроби, а знаменателемъ ея будетъ прежній знаменатель.*

$$\text{Напримѣръ: } 5\frac{3}{5} = \frac{5 \times 5 + 3}{5} = \frac{25 + 3}{5} = \frac{28}{5}, \quad 9\frac{8}{11} = \frac{99 + 8}{11} = \frac{107}{11}.$$

При рѣшеніи задачъ на дроби весьма часто также приходится **обращать неправильныя дроби въ смѣшанныя числа**. Если смѣшанное число  $3\frac{3}{4}$  (въ той же задачѣ) обращается въ неправильную дробь  $\frac{15}{4}$ , то, понятно, неправильная дробь  $\frac{15}{4}$  обратится въ смѣшанное число  $3\frac{3}{4}$ . Дѣйствительно, въ одной цѣлой единицѣ имѣется только 4 четверти; слѣдовательно, изъ пятнадцати четвертей можно составить нѣсколько цѣлыхъ единицъ, а именно столько, сколько разъ 4 содержится въ 15, т.-е. 3 цѣлыхъ единицы. Итакъ, изъ  $\frac{15}{4}$  можно составить 3 цѣлыхъ единицы, и еще останутся три четверти; значить, неправильная дробь  $\frac{15}{4}$  обратилась въ три цѣлыхъ единицы и три четверти, т.-е. въ смѣшанное число  $3\frac{3}{4}$ .

Подобнымъ разсужденіемъ можно любую неправильную дробь обращать въ смѣшанное число.

Такъ, неправильная дробь  $\frac{21}{5} = 21 : 5 = 4$  цѣлыхъ единицы + остатокъ  $\frac{1}{5}$  = смѣшанному числу  $4\frac{1}{5}$ ;  $\frac{37}{12} = 37 : 12 = 3 + \text{остат. } \frac{1}{12} = 3\frac{1}{12}$ .

Вообще,



Чтобы обратить неправильную дробь въ смѣшанное число, надо числителя ея дѣлить на знаменателя; полученное частное будетъ цѣлой частью смѣшаннаго числа, а остатокъ отъ этого дѣленія будетъ числителемъ дробной части, знаменателемъ же будетъ прежній знаменатель.

Обращеніе неправильной дроби въ смѣшанное число еще иначе называется исключеніемъ цѣлага числа изъ дроби, такъ какъ при этомъ изъ дроби выдѣляется, исключается цѣлое число.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Вопросы:

1) Обратить въ неправильныя дроби:  $3\frac{1}{2}$ ,  $24\frac{1}{2}$ ,  $25\frac{1}{2}$ ,  $43\frac{1}{2}$ ,  $105\frac{1}{2}$ ,  $104\frac{1}{2}$ ,  $1000\frac{1}{2}$ .

2) Обратить въ цѣлыя и смѣшанныя числа:  $\frac{16}{5}$ ,  $\frac{51}{2}$ ,  $\frac{845}{8}$ ,  $\frac{2340}{10}$ ,  $\frac{13422}{6}$ .

3) Сколько пятыхъ долей въ числѣ 53?

4) Сколько цѣлыхъ единицъ въ числѣ  $\frac{211}{20}$ ?

5) 10 работниковъ получили 25 руб. и раздѣлили ихъ поровну. Сколько получилъ каждый изъ нихъ?

Отвѣты:

$$1) \frac{16}{5}, \frac{67}{25}, \frac{51}{2}, \frac{175}{4}, \frac{845}{8}, \frac{161}{15}, \frac{21011}{21}.$$

$$2) 3\frac{1}{2}, 24\frac{1}{2}, 105\frac{1}{2}, 234, 2237.$$

$$3) 5 = \frac{25}{5}, 5\frac{3}{5} = \frac{25}{5} + \frac{3}{5} = \frac{28}{5}. \text{ Отв. } 28.$$

$$4) \text{ Надо } 217 \text{ раздѣлить на } 20. \text{ Отв. } 10.$$

$$5) \text{ Надо } 25 \text{ рублей раздѣлить на } 10; \frac{25}{10} = 2\frac{1}{2} \text{ руб.}$$

## § 29. Измѣненіе величины дроби.

Точно такъ же, какъ цѣлыя числа могутъ имѣть различную величину, и дроби могутъ увеличиваться или уменьшаться, т.-е. измѣнять свою величину. Нетрудно понять, что величина дроби зависитъ отъ величины ея числителя и знаменателя; стоитъ только измѣнить одного изъ нихъ, какъ измѣнится вся дробь.

Всякую дробь можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія двухъ чиселъ; такъ, дробь  $\frac{5}{7}$  есть частное отъ дѣленія 5 на 7;  $\frac{12}{13}$  есть частное отъ дѣленія 12 на 13. Отсюда видно, что числитель дроби есть дѣлимое, а знаменатель является дѣлителемъ; отсюда же мы приходимъ къ заключенію, что зависимость между числителемъ, знаменателемъ и всей дробью такая же, какъ между дѣлимымъ, дѣлителемъ и частнымъ (см. § 13):

Если числителя дроби увеличить въ нѣсколько разъ, то во столько же разъ увеличится и вся дробь.

Если числителя дроби уменьшить въ нѣсколько разъ, то во столько же разъ уменьшится и вся дробь.

Если знаменателя дроби увеличить въ нѣсколько разъ, то вся дробь уменьшится во столько же разъ.

Если знаменателя дроби уменьшить въ нѣсколько разъ, то вся дробь увеличится во столько же разъ.

Если оба члена дроби, т.-е. и числителя и знаменателя, увеличить или уменьшить въ одинаковое число разъ, то дробь отъ этого не измѣнится.

Убѣдимся въ вѣрности этихъ выводовъ на примѣрахъ.

Что больше:  $\frac{2}{5}$  рубля или  $\frac{3}{10}$  рубля? Знаменатель 10 больше знаменателя 5 въ 2 раза; слѣдовательно, дробь  $\frac{3}{10}$  въ 2 раза меньше дроби  $\frac{2}{5}$ .



На самомъ дѣлѣ,  $\frac{1}{5}$  рубля = 20 коп., а  $\frac{2}{5}$  = 40 коп.;  $\frac{1}{10}$  рубля = 10 коп., а  $\frac{3}{10}$  = 30 коп.; 60 коп. больше 30 коп. въ 2 раза.

Что больше:  $\frac{2}{5}$  руб. или  $\frac{4}{5}$  руб.? Числитель 4 въ 2 раза больше числителя 2, а знаменатель одинъ и тотъ же; слѣдовательно, дробь  $\frac{4}{5}$  въ 2 раза больше  $\frac{2}{5}$ . На самомъ дѣлѣ,  $\frac{2}{5}$  руб. = 40 коп., а  $\frac{4}{5}$  = 80 коп.; но 80 коп. въ 2 раза больше 40 коп.

Что больше:  $\frac{3}{5}$  руб. или  $\frac{6}{10}$  руб.? Числитель и знаменатель дроби  $\frac{6}{10}$  въ 2 раза больше членовъ дроби  $\frac{3}{5}$ ; слѣдовательно, величина этихъ дробей должна быть равной. На самомъ дѣлѣ,  $\frac{3}{5}$  руб. = 60 коп. и  $\frac{6}{10}$  руб. = 60 коп.

Всѣ предыдущіе выводы подтверждаются еще слѣдующимъ простымъ разсужденіемъ. Знаменатель дроби показываетъ, на сколько долей раздѣлена единица. Очевидно, чѣмъ больше будетъ знаменатель, тѣмъ мельче будутъ доли единицы, и тѣмъ меньше будетъ величина дроби. Наоборотъ, чѣмъ знаменатель будетъ меньше, тѣмъ больше будутъ доли единицы, и тѣмъ больше будетъ величина дроби. Числитель же показываетъ, сколько долей единицы взято. Поэтому, чѣмъ больше будетъ числитель, тѣмъ больше долей единицы взято будетъ, и тѣмъ больше будетъ сама дробь; чѣмъ числитель будетъ меньше, тѣмъ меньше будетъ число взятыхъ долей, и тѣмъ меньше будетъ величина дроби. Если же и числитель и знаменатель увеличиваются вмѣстѣ, то хотя и доли становятся мельче, но ихъ зато взято больше, а потому дробь величины своей не измѣнитъ. То же самое происходитъ и при уменьшеніи числителя и знаменателя.

На основаніи всѣхъ этихъ выводовъ объ измѣненіи величины дроби, мы получаемъ слѣдующія правила:

1) Чтобы увеличить дробь въ нѣсколько разъ, достаточно увеличить во столько же разъ ея числителя или уменьшить ея знаменателя.

2) Чтобы уменьшить дробь въ нѣсколько разъ, достаточно уменьшить во столько же разъ ея числителя или увеличить знаменателя.

Такъ, чтобы увеличить дробь  $\frac{5}{31}$  въ 5 разъ, надо числителя 5 увеличить въ 5 разъ, т.-е. умножить на 5:

$$\frac{5 \cdot 5}{31} = \frac{25}{31},$$

уменьшить знаменателя въ данномъ случаѣ было бы неудобно, ибо онъ не дѣлится на 5.

Чтобы уменьшить дробь  $\frac{9}{30}$  въ 6 разъ, надо знаменателя 30 увеличить въ 6 разъ, т.-е. умножить его на 6:

$$\frac{9}{30 \cdot 6} = \frac{9}{180},$$

уменьшить числителя въ 6 разъ здѣсь было бы неудобно, ибо онъ не дѣлится на 6.

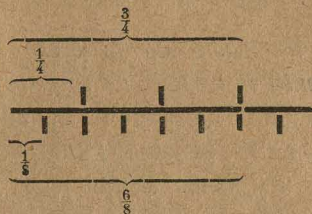
Мы уже знаемъ, что если одновременно увеличить или уменьшить оба члена дроби въ одинаковое число разъ, то дробь своей величины не измѣнитъ. Такъ, если въ дроби  $\frac{3}{4}$  увеличимъ числителя и знаменателя въ 2 раза, то получимъ дробь:

$$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}.$$

Дроби  $\frac{3}{4}$  и  $\frac{6}{8}$  должны быть равны по величинѣ. Посмотримъ, на самомъ ли дѣлѣ это такъ. Дробь  $\frac{3}{4}$  означаетъ, что единица раздѣлена на 4 части, и



такихъ частей взято 3; дробь  $\frac{6}{8}$  означаетъ, что единица раздѣлена на 8 частей и такихъ частей взято 6. Число четвертыхъ частей въ 2 раза меньше числа восьмыхъ частей, зато восьмыхъ взято вдвое болѣе, нежели четвертыхъ; значить, по величинѣ дроби  $\frac{3}{4}$  и  $\frac{6}{8}$  равны. Въ этомъ легко также убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ линію, раздѣлимъ ее на 4 части и возьмемъ такихъ частей 3; взятая нами часть линіи будетъ равна  $\frac{3}{4}$  ея.



Раздѣливъ эту же линію на 8 частей и взявъ такихъ частей 6, получимъ ту же часть линіи, что и раньше.

Слѣдовательно, дроби, хотя онѣ и могутъ быть составлены изъ разныхъ частей единицы, все же будутъ равны, если только онѣ выражаютъ *одно и то же значеніе данной величины*, т.-е. одну и ту же часть единицы. На основаніи этого, мы можемъ всякую дробь, не мѣняя ея величины, выразить въ большихъ числахъ, умноживъ ея числителя и знаменателя на какое угодно число, а также и въ меньшихъ числахъ, раздѣливъ ея числителя и знаменателя на одно и то же число.

Наприм., дробь  $\frac{6}{11}$  можно выразить дробями:  $\frac{12}{22}$ ,  $\frac{18}{33}$  и т. д.; дробь  $\frac{12}{30}$  можно выразить дробями:  $\frac{6}{15}$ ,  $\frac{2}{5}$ .

## УПРАЖНЕНІЯ.

### Вопросы:

- 1) Увеличить дроби:  $\frac{2}{3}$  въ 10 разъ;  $\frac{6}{15}$  въ 5 разъ;  $\frac{22}{111}$  въ 37 разъ.

- 2) Уменьшить дроби:  $\frac{11}{12}$  въ 11 разъ;  $\frac{7}{12}$  въ 7 разъ;  $\frac{235}{1001}$  въ 47 разъ.

- 3) Каждую изъ слѣдующихъ дробей сначала увеличить въ 25 разъ, а потомъ полученные числа уменьшить въ 7 разъ:  $\frac{14}{15}$ ,  $\frac{147}{11000}$ ,  $\frac{427}{100}$ ,  $\frac{6440}{12300}$ ,  $\frac{2275}{2225}$ .

- 4) Не мѣняя величины дроби  $\frac{7}{15}$ , выразить ея члены въ большихъ числахъ. Не мѣняя величины дроби  $\frac{24}{16}$ , выразить ея члены въ меньшихъ числахъ.

- 5) Нѣкто истратилъ сначала своихъ денегъ, а потомъ въ 2 раза меньше прежняго. Сколько десятыхъ долей онъ истратилъ въ оба раза?

- 6) Одинъ работникъ сдѣлалъ  $\frac{1}{2}$  нѣкоторой работы, а другой  $\frac{1}{4}$  ея. Какой изъ нихъ сдѣлалъ больше?

### Отвѣты:

- 1) Надо числитель дроби  $\frac{2}{3}$  умножить на 10, получимъ  $\frac{20}{3}$  = 6; числитель дроби  $\frac{6}{25}$  умножить на 5:  $\frac{30}{25}$  =  $\frac{6}{5}$ ; знаменатель дроби  $\frac{22}{111}$  раздѣлить на 37:  $\frac{52}{111:37} = \frac{52}{3}$ .

- 2)  $\frac{1}{11}$ ,  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{5}{1001}$ .

- 3) 2,  $\frac{21}{10}$ , 154,  $\frac{235}{100}$ ,  $\frac{2275}{2225}$ . Напр.:  $\frac{14}{15}$  увеличить въ 25 разъ =  $\frac{14 \cdot 25}{15} = 14$ ; затѣмъ 14 уменьшить въ 7 разъ =  $\frac{14}{7} = 2$  и т. д.

- 4)  $\frac{14}{30}$ ,  $\frac{21}{45}$  и т. д.;  $\frac{12}{108}$ ,  $\frac{8}{12}$  и т. д.

- 5) 9.

- 6) Оба сдѣлали одинаково



### § 30. Сокращеніе дробей.

Величина дроби, какъ мы видѣли, не мѣняется отъ дѣленія числителя и знаменателя на одно и то же число. Послѣ такого дѣленія числитель и знаменатель выражаются числами, меньшими прежнихъ, что представляетъ нѣкоторое удобство. Поэтому, если имѣется возможность произвести это упрощеніе дроби, то всегда его производятъ. Упрощеніе это называется *сокращеніемъ* дроби.

*Сократить дробь на какое-нибудь число значитъ найти равную ей дробь посредствомъ дѣленія ея членовъ на это число.*

Напр., дробь  $\frac{75}{120}$  можно сократить на 3, такъ какъ числитель и знаменатель дѣлятся, на основаніи признака дѣлимости, на 3; по сокращеніи мы получимъ дробь  $\frac{25}{40}$ . Но эту дробь можно еще сократить на 5, и, слѣдовательно,  $\frac{25}{40}$  можно замѣнить равной дробью  $\frac{5}{8}$ . Дѣйствіе это записывается такъ:

$$\frac{75\cancel{3}}{120\cancel{3}} = \frac{25\cancel{5}}{40\cancel{5}} = \frac{5}{8}.$$

Конечно, мы могли бы сразу сократить на 15, и тогда бы мы имѣли:

$$\frac{75\cancel{15}}{120\cancel{15}} = \frac{5}{8}.$$

Если далѣе дробь сократить нельзя, то она называется *несократимой*. Чтобы получить сразу несократимую дробь, нужно числителя и знаменателя раздѣлить на ихъ наибольшаго дѣлителя. Напр.,  $\frac{2430}{2592}$ ; общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя находится по общему правилу:

2430	2	2592	2
1215	3	1296	2
405	3	648	2
135	3	324	2
45	3	162	2
15	3	81	3
5	5	27	3
1		9	3
		3	3
		1	

$$2.3.3.3.3 = 162. \quad \text{Слѣдовательно,} \quad \frac{2430\cancel{162}}{2592\cancel{162}} = \frac{15}{16}.$$

### § 31. Сравненіе дробей.

1) Сравнимъ двѣ дроби, имѣющія одинаковые числители, но разные знаменатели. Ясно, что та дробь по величинѣ больше, у которой знаменатель меньше, ибо части, на которыя раздѣлена была единица для составленія этой дроби, больше соответствующихъ частей дроби, знаменатель которой больше. Напр., изъ дробей  $\frac{4}{5}$  и  $\frac{4}{7}$  первая дробь больше, ибо  $\frac{4}{5}$  больше  $\frac{4}{7}$ .

2) Изъ двухъ дробей, имѣющихъ равные знаменатели, та больше, у которой числитель больше, такъ какъ у этой дроби больше число взятыхъ частей. Напр.:  $\frac{3}{5}$  и  $\frac{4}{5}$ ; послѣдняя дробь больше.

3) Если же члены дробей выражены различными числами (напр.  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{11}{13}$ ), то для ихъ сравненія всего удобнѣе выразить ихъ въ одинаковыхъ доляхъ, т.-е. преобразовать ихъ такъ, чтобы знаменатели стали одинаковыми. Дѣйствіе это называется *приведеніемъ дробей къ одному знаменателю*.



Привести дроби къ одному знаменателю значитъ, не измѣняя ихъ величины, сдѣлать ихъ знаменатели равными между собой. Дѣйствіе это основано на томъ, что величина дроби не мѣняется отъ умноженія числителя и знаменателя на одно и то же число.

Пусть намъ даны двѣ дроби:

$$\frac{5}{6} \text{ и } \frac{7}{9}.$$

Выражены онѣ въ разныхъ доляхъ и потому между собой не сравнимы. Въ какихъ же одинаковыхъ доляхъ мы ихъ можемъ выразить? Выразить ихъ мы можемъ въ какихъ угодно равныхъ доляхъ, лишь бы доли эти дѣлились нацѣло на данные знаменатели. Мы знаемъ, что наименьшее изъ чиселъ, дѣлящихся на данныя два числа (въ этомъ случаѣ—на знаменатели), будетъ ихъ общее наименьшее кратное, найденное по выше указаннымъ правиламъ. Въ нашемъ примѣрѣ такимъ числомъ будетъ 18. Вообще, общимъ знаменателемъ всегда выбираютъ наименьшее кратное знаменателей. Такъ какъ каждая  $\frac{1}{6}$  единицы содержитъ въ себѣ  $\frac{3}{18}$  (единица содержитъ  $\frac{18}{18}$ ), то  $\frac{5}{6}$  будетъ содержать въ себѣ  $\frac{15}{18}$ , т.-е. мы числителя и знаменателя дроби  $\frac{5}{6}$  умножили на число 3, получившееся отъ дѣленія общаго знаменателя 18 на первый знаменатель 6. Чтобы выразить дробь  $\frac{7}{9}$  въ восемнадцатыхъ доляхъ, надо числителя и знаменателя помножить на 2 (такъ какъ  $18 : 9 = 2$ ), т.-е.  $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$ .

Изъ рассмотрѣннаго примѣра мы можемъ сдѣлать слѣдующій выводъ: для того, чтобы привести дроби къ общему знаменателю, находятъ наименьшее кратное всѣхъ знаменателей и умножаютъ числителя и знаменателя каждой дроби на частное, получаемое отъ дѣленія общаго знаменателя на знаменателя этой дроби.

Сравнивъ получившіяся дроби:  $\frac{15}{18}$  и  $\frac{14}{18}$ , мы видимъ, что первая дробь больше второй, т.-е.  $\frac{5}{6}$  больше  $\frac{7}{9}$ .

## УПРАЖНЕНІЯ.

Вопросы:

- 1) Сравнить три дроби:  $\frac{2}{15}$ ;  $\frac{1}{15}$ ;  $\frac{2}{20}$ .
- 2) » » »  $\frac{1}{17}$ ;  $\frac{1}{17}$ ;  $\frac{5}{17}$ .
- 3) Привести къ общ. знам. дроби  $\frac{2}{15}$ ;  $\frac{4}{25}$ ;  $\frac{7}{30}$ .

4) » » » »  $\frac{5}{7}$ ;  $\frac{3}{5}$ ;  $\frac{1}{4}$ .

5) » » » »  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{3}{8}$ ;  $\frac{5}{32}$ .

6) » » » »  $\frac{1}{15}$ ;  $\frac{1}{24}$ ;  $\frac{11}{40}$ .

Отвѣты:

1) Наибольшая  $\frac{2}{15}$ .

2) »  $\frac{1}{17}$ .

3) Такъ какъ наименьшее кратное знаменателей будетъ 150, то, послѣ приведенія къ общему знаменателю, мы будемъ имѣть:  $\frac{20}{150}$ ;  $\frac{24}{150}$ ;  $\frac{35}{150}$ .

4) Такъ какъ числа 7, 5 и 4 попарно взаимно простые, то наименьшимъ кратнымъ будетъ ихъ произведеніе, т.-е. 140; послѣ приведенія къ общему знаменателю будемъ имѣть:  $\frac{100}{140}$ ;  $\frac{34}{140}$ ;  $\frac{35}{140}$ .

5) Наименьшимъ кратнымъ будетъ 32, и, слѣдовательно, дроби, приведенныя къ одному знаменателю, получатъ такой видъ:  $\frac{8}{32}$ ;  $\frac{12}{32}$ ;  $\frac{5}{32}$ .

6)  $\frac{8}{120}$ ;  $\frac{55}{120}$ ;  $\frac{33}{120}$ .



*Примѣчаніе.* Если обратить вниманіе на то число, на которое приходится умножать числителя при приведеніи къ общему знаменателю, то можно замѣтить, что это есть произведеніе множителей, недостающихъ къ знаменателю дроби. Дѣйствительно, въ послѣднемъ примѣрѣ общій знаменатель есть наименьшее кратное чиселъ:  $15 = 3 \cdot 5$ ;  $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ;  $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ , т.-е. число  $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ . Первую дробь мы умножаемъ на  $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ , вторую — на 5, третью — на 3. Это замѣчаніе даетъ намъ возможность упростить нахожденіе числа, на которое приходится умножать каждую дробь.

### § 32. Нахожденіе части по цѣлому.

Всякая дробь обозначаетъ какую-нибудь часть единицы или часть цѣлаго числа, состоящаго изъ нѣсколькихъ единицъ.

Раздѣливъ, напримѣръ, какое-нибудь число на восемь частей и взявъ одну такую часть, мы получимъ одну восьмую его; взявъ три такихъ части, получимъ три восьмыхъ. Одну восьмую мы обозначаемъ дробью  $\frac{1}{8}$ , три восьмыхъ — дробью  $\frac{3}{8}$ .

Отсюда видно, что *нахожденіе части по цѣлому числу сводится къ нахожденію дроби этого числа.*

Положимъ, что у помѣщика было 294 десятины земли, и  $\frac{2}{7}$  части этого количества были заняты пахотной землей. Какъ узнать, сколько у него десятинъ пахотной земли было?

Разумѣется, надо найти, чему равняются  $\frac{2}{7}$  части числа 294. Одна седьмая часть числа 294 будетъ въ 7 разъ меньше самаго числа. Дѣлимъ 294 на 7:

$$294 : 7 = 42.$$

Две седьмыхъ будутъ въ 2 раза больше:

$$42 \times 2 = 84.$$

Нашу задачу можно, однако, рѣшить и при помощи дробей.  $\frac{1}{7}$  часть числа 294 равна 294-мъ, раздѣленнымъ на 7; частное отъ этого дѣленія изобразимъ въ видѣ неправильной дроби:

$$\frac{1}{7} \text{ часть числа } 294 = \frac{294}{7}.$$

$\frac{2}{7}$  части числа 294 будутъ въ два раза больше  $\frac{1}{7}$ ; и дробь  $\frac{294}{7}$  надо увеличить въ 2 раза (чтобы увеличить въ 2 раза дробь, достаточно увеличить въ 2 раза числителя):

$$\frac{2}{7} \text{ части числа } 294 = \frac{294 \cdot 2}{7}.$$

Умноживъ числителя на 2, получимъ неправильную дробь:  $\frac{588}{7}$ , исключивъ изъ этой дроби цѣлое число, получимъ 84.

Итакъ, у помѣщика было 84 десятины пахотной земли.

Нахожденіе части по данному цѣлому всегда сводится къ нахожденію дроби даннаго числа и рѣшается при посредствѣ дробей по слѣдующему правилу:

*Чтобы найти часть даннаго числа, надо это число раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ знаменателѣ дроби, обозначающей эту часть, и одну такую часть повторить слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ числителѣ той же дроби.*



## УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Найти  $\frac{5}{9}$  отъ числа 45.

$$1) \frac{1}{9} \text{ числа } 45 = \frac{45}{9}; \frac{5}{9} = \frac{45 \cdot 5}{9} = \frac{225}{9} = 25$$

2) Найти  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{1}{6}$  отъ числа 240 и полученные результаты сложить.

$$2) \frac{1}{3} \text{ отъ } 240 = 80; \frac{1}{4} \text{ отъ } 240 = 60; \frac{1}{6} \text{ отъ } 240 = 40; \text{ итого: } 80 + 60 + 40 = 180.$$

3) Разстояніе между двумя деревнями равно 75 верст. Чему равняются  $\frac{2}{3}$  этого разстоянія?

$$3) \frac{1}{3} \text{ отъ } 75 = \frac{75}{3}; \frac{2}{3} \text{ отъ } 75 = \frac{75 \cdot 2}{3} = \frac{150}{3} = 50 \text{ верст.}$$

4) Въ губернскомъ городѣ 60000 жителей; число жителей уѣзднаго города равно  $\frac{2}{3}$  числа губернскаго. Сколько жителей въ томъ и другомъ вмѣстѣ?

$$4) \frac{2}{3} \text{ отъ } 60000 \text{ жит.} = 40000 \text{ жит.}; 60000 \text{ жит.} + 40000 \text{ жит.} = 100000 \text{ жит.}$$

5) Нѣкто истратилъ  $\frac{1}{3}$  своихъ денегъ на покупку земли,  $\frac{2}{5}$  на постройку дома и  $\frac{1}{10}$  на прочія хозяйственныя нужды; всего же денегъ у него было 3000 р. Сколько денегъ у него осталось?

$$5) \frac{1}{3} \text{ отъ } 3000 \text{ р.} = 1000 \text{ р.}; \frac{2}{5} \text{ отъ } 3000 \text{ р.} = 1200 \text{ р.}; \frac{1}{10} \text{ отъ } 3000 \text{ р.} = 300 \text{ р.}; 1000 \text{ р.} + 1200 \text{ р.} + 300 \text{ р.} = 2500 \text{ р.}; 3000 \text{ р.} - 2500 \text{ р.} = 500 \text{ р.}$$

## § 33. Нахожденіе цѣлаго по его части.

Весьма часто бываютъ случаи, когда требуется найти цѣлое число по данной его части, т.-е. когда надо отыскать то цѣлое число, отъ котораго произошла данная часть.

Это тоже выполняется легко и удобно при помощи дробей.

Пусть, на примѣръ,  $\frac{1}{5}$  какого-то числа равна 4; что это будетъ за число? Всякая цѣлая единица состоитъ изъ пяти пятыхъ частей; слѣдовательно, и искомое число, которое можно разсматривать, какъ отдѣльную единицу, тоже имѣетъ пять пятыхъ. Одна пятая его равна 4; слѣдовательно, все оно (или пять пятыхъ) будетъ въ 5 разъ больше четырехъ, т.-е. будетъ равно  $4 \times 5 = 20$ .

Возьмемъ теперь слѣдующую задачу:

$\frac{3}{4}$  части куска сукна равны 15 аршинамъ; сколько всего аршинъ въ кускѣ?

Если три четверти куска содержатъ 15 аршинъ, то одна такая четверть будетъ содержать въ 3 раза меньше аршинъ, т.-е.

$$15 \text{ арш.} : 3 = 5 \text{ аршинъ};$$

всего же въ кускѣ четыре четверти, слѣдовательно, аршинъ въ немъ будетъ:

$$5 \text{ арш.} \times 4 = 20 \text{ аршинъ.}$$

Въ этой задачѣ мы по величинѣ  $\frac{3}{4}$  куска опредѣлили величину всего куска, т.-е. по данной его части нашли цѣлое. Нахожденіе цѣлаго по части тоже сводится къ нахожденію цѣлаго числа по его дроби, и нашу задачу поэтому можно рѣшить при помощи дробей слѣдующимъ образомъ:

$\frac{3}{4}$  куска равны 15 аршинамъ; слѣдовательно,  $\frac{1}{4}$  его будетъ въ 3 раза меньше; дѣлимъ 15 на 3, и частное изображаемъ въ видѣ неправильной дроби:

$$\frac{3}{4} (\text{куска}) = 15 \text{ арш.},$$

$$\frac{1}{4} (\text{куска}) = \frac{15}{3} \text{ арш.};$$



а такъ какъ весь кусокъ состоитъ изъ  $\frac{4}{3}$ , то въ немъ будетъ въ 4 раза больше аршинъ, т.-е. дробь  $\frac{15}{3}$  надо увеличить въ 4 раза (чтобы увеличить дробь въ 4 раза, достаточно числителя ея увеличить въ 4 раза):

$$\frac{4}{3} (\text{куса}) = \frac{15 \cdot 4}{3} \text{ арш.}$$

Умноживъ 15 на 4 и раздѣливъ на 3, получимъ неправильную дробь  $\frac{60}{3}$ ; исключивъ цѣлое число, получимъ 20. Въ кускѣ было 20 аршинъ.

Нахожденіе цѣлага числа по его дроби всегда выполняется точно такъ же, какъ въ нашемъ примѣрѣ.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Найти число,  $\frac{7}{11}$  части котораго равны 28.

1)  $\frac{7}{11}$  числа = 28;  $\frac{1}{11}$  его =  $\frac{28 \cdot 11}{7}$  или все число =  $\frac{28 \cdot 11}{7} = \frac{308}{7} = 44$ .

2) Длина рѣки Невы равна числу верстъ,  $\frac{3}{2}$  котораго равны 4. Найти длину Невы.

2)  $\frac{3}{2}$  числа = 4;  $\frac{1}{2}$  числа =  $\frac{4}{3} = 2$ ;  $\frac{3}{2}$  числа =  $2 \times 3 = 6$  вер.

3) Пѣшеходъ прошелъ  $\frac{7}{10}$  версты, и это разстояніе составляетъ  $\frac{1}{5}$  всего его пути. Какъ великъ его путь?

3)  $\frac{1}{5}$  пути =  $\frac{7}{10}$  вер.;  $\frac{1}{25}$  пути =  $\frac{7}{10 \cdot 5}$  вер.;  $\frac{25}{25}$  пути =  $\frac{7 \cdot 25}{140}$  вер. =  $\frac{175}{140}$  вер. =  $\frac{5}{4}$  вер. = 625 саж.

4)  $\frac{1}{15}$  лѣтъ сына равны  $\frac{1}{4}$  лѣтъ отца, которому 68 лѣтъ. Сколько лѣтъ сыну?

4)  $\frac{1}{4}$  лѣтъ отца = 16 л.;  $\frac{8}{15}$  лѣтъ сына = 16 л.;  $\frac{1}{15}$  лѣтъ сына =  $\frac{16}{8} = 2$  г.;  $\frac{15}{15}$  лѣтъ сына =  $2 \times 15 = 30$  л.

## Повторительные вопросы и ответы.

1) Что такое смѣшанное число?—Смѣшаннымъ числомъ называется число, состоящее изъ цѣлой и дробной части.

2) Что называется сокращеніемъ дроби?—Сокращеніе дроби есть представленіе членовъ дроби въ меньшихъ числахъ безъ измѣненія ея величины.

3) Что значитъ привести дроби къ одному знаменателю?—Это значитъ выразить дроби въ одинаковыхъ доляхъ единицы.

4) Какъ найти общаго знаменателя?—Надо найти наименьшее кратное всѣхъ знаменателей.

5) Какъ привести дроби къ общему знаменателю?—Числителя и знаменателя каждой дроби умножаютъ на частное отъ дѣленія общаго знаменателя на даннаго.

## ГЛАВА 2-ая.

### § 34. Дѣйствія надъ дробями.

#### Сложеніе дробей.

Такъ какъ складывать можно только величины однородныя, а двѣ дроби съ различными знаменателями будутъ величинами разнородными, какъ выраженные въ разныхъ частяхъ единицы, то, прежде чѣмъ произвести сложеніе, необходимо привести дроби къ общему наименьшему знаменателю. Послѣ приведенія къ общему наименьшему знаменателю данныхъ дробей, или, что то же самое, послѣ того, какъ мы каждую дробь выразили въ одинаковыхъ доляхъ единицы, намъ остается сложить числители, указывающіе, сколько такихъ долей заключается въ каждой дроби, и подъ полученной суммой подписать общій знаменатель въ качествѣ знаменателя же.



Сложеніемъ числителей мы узнаемъ, сколько долей единицы заключается во всѣхъ данныхъ дробяхъ, а подписанный подъ суммой знаменатель указываетъ, какія доли единицы мы сложили.

Напримѣръ, надо сложить  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{6}$ ; приведя эти дроби къ одному знаменателю, получаемъ  $\frac{4}{6}$  и  $\frac{1}{6}$ . Въ первой дроби 4 шестыхъ единицы, во второй 1 шестая единицы; всего, значитъ, 5 шестыхъ единицы. Записываемъ такъ:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}.$$

**Правило.** Чтобы сложить дроби, слѣдуетъ сначала привести ихъ къ одному знаменателю, сложить числители и подъ полученной суммой подписать общій знаменатель.

Если приходится складывать смѣшанные числа, то раньше складываютъ цѣлыя числа, затѣмъ дроби, и къ первой суммѣ прибавляютъ вторую.

Напр.:  $6\frac{3}{8} + 2\frac{7}{12} = 6 + 2 + \frac{3}{8} + \frac{7}{12} = 8 + \frac{9}{24} + \frac{14}{24} = 8\frac{23}{24}$ .

Дѣйствіе это записываютъ короче такъ:

$$6\frac{3}{8} + 2\frac{7}{12} = 8\frac{9+14}{24} = 8\frac{23}{24}.$$

Весьма часто послѣ сложения получаются сократимыя дроби или неправильныя; въ такихъ случаяхъ нужно послѣ дѣйствія произвести и сокращеніе и исключеніе цѣлой части.

Напр.:  $3\frac{1}{4} + 2\frac{5}{6} + 7\frac{1}{12} = 12 + \frac{3}{12} + \frac{10}{12} + \frac{1}{12} = 12 + \frac{14}{12} = 12 + 1\frac{2}{12} = 13\frac{2}{12} = 13\frac{1}{6}$ .

Короче можно записать такъ:

$$3\frac{1}{4} + 2\frac{5}{6} + 7\frac{1}{12} = 12\frac{3+10+1}{12} = 12\frac{14}{12} = 13\frac{2}{12} = 13\frac{1}{6}.$$

## УПРАЖНЕНІЯ.

ОТВѢТЫ:

1)  $4\frac{5}{14} + 7\frac{7}{12} + 2\frac{3}{10}$ .

1)  $14\frac{131}{140}$ .

2)  $2\frac{1}{4} + 5\frac{1}{10} + 2\frac{3}{5}$ .

2)  $10\frac{37}{50}$ .

3)  $2\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + 1\frac{22}{24} + 3\frac{1}{12}$ .

3)  $7\frac{11}{360}$ .

## Вычитаніе дробей.

При вычитаніи дробей могутъ представиться два случая: уменьшаемое и вычитаемое имѣютъ или одинаковые знаменатели, или разные.

Вычтемъ изъ дроби  $\frac{9}{10}$  дробь  $\frac{3}{10}$ . Намъ въ данномъ случаѣ надо 9 десятыхъ частей единицы уменьшить на 3 такихъ же десятыхъ ея; въ разности, понятно, получится 6 такихъ десятыхъ. Обозначается дѣйствіе такъ:

$$\frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{9-3}{10} = \frac{6}{10}.$$

Слѣдовательно, чтобы вычесть дроби съ одинаковыми знаменателями, надо только вычесть числитель вычитаемого изъ числителя уменьшаемого и подъ полученной разностью подписать общій знаменатель.

Пусть теперь намъ дано вычесть  $\frac{2}{25}$  изъ  $\frac{8}{15}$ .

Дробь  $\frac{2}{25}$  означаетъ 2 двадцать пятыхъ доли какой-то единицы, а дробь  $\frac{8}{15}$  означаетъ 8 пятнадцатыхъ долей той же единицы. Но двадцать пятая доля по величинѣ не тѣ же, что пятнадцатая; дроби  $\frac{2}{25}$  и  $\frac{8}{15}$ , слѣдовательно, составлены изъ разнородныхъ долей, и поэтому вычесть ихъ одну изъ другой нельзя; слѣдовательно, надо эти дроби привести къ одному знаменателю.



Приведеніе дробей къ одному знаменателю при вычитаніи производится по общему правилу. Общее наименьшее кратное знаменателей 25 и 15 равно 75; дополнительнымъ множителемъ для знаменателя 25 будетъ —  $75 : 25 = 3$ , а для знаменателя 15 будетъ —  $75 : 15 = 5$ . Теперь располагаемъ дѣйствіе такъ:

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{40}{75}, \quad \frac{2}{25} = \frac{2 \cdot 3}{25 \cdot 3} = \frac{6}{75}, \quad \frac{40}{75} - \frac{6}{75} = \frac{40-6}{75} = \frac{34}{75}.$$

Послѣ приведенія дробей къ одному знаменателю ихъ вычитаютъ, какъ дроби съ одинаковыми знаменателями.

**Правило.** Чтобы вычесть дроби съ разными знаменателями, сначала слѣдуетъ привести ихъ къ одному знаменателю, а затѣмъ вычесть числитель вычитаемого изъ числителя уменьшаемого и подѣлить полученной разностью на общій знаменатель.

### УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Вычесть дроби:  $\frac{15}{20}$  изъ  $\frac{23}{20}$ .

1)  $\frac{23-15}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ .

2) Вычесть дроби:  $\frac{10}{18}$  изъ  $\frac{4}{9}$ .

2)  $\frac{4}{9} - \frac{10}{18} = \frac{20-10}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ .

3) Вычесть дроби:  $\frac{30}{45} - \frac{2}{3}$ ;  $\frac{19}{21} - \frac{3}{15}$ ;  $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$ .

3)  $\frac{30}{45} - \frac{2}{3} = \frac{27-18}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ ;  $\frac{19}{21} - \frac{3}{15} = \frac{50-21}{105} = \frac{29}{105}$ ;  $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{10-2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ .

**Вычитаніе смѣшанныхъ чиселъ.** Посмотримъ сначала, какъ вычитается дробь изъ цѣлаго числа. Для примѣра возьмемъ выраженіе:  $5 - \frac{1}{2}$ . Это значитъ, что изъ 5 единицъ надо вычесть половину одной единицы. Нетрудно догадаться, что въ разности получатся 4 цѣлыя единицы и оставшаяся половина пятой единицы. Иначе говоря, одну изъ 5 единицъ мы раздробляемъ на двѣ половины; изъ этихъ двухъ половинокъ мы вычитаемъ одну половину, а въ разности получается, такимъ образомъ, цѣлое число 4 съ дробью  $\frac{1}{2}$ , т.-е. смѣшанное число  $4\frac{1}{2}$ :

$$5 - \frac{1}{2} = 4\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Подобно этому  $6 - \frac{3}{4} = 5\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}$ ;  $12 - \frac{2}{3} = 11\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 11\frac{1}{3}$ .

При вычитаніи дроби изъ смѣшаннаго числа бываютъ три случая:

**Случай 1.** Вычтемъ  $\frac{7}{8}$  изъ  $2\frac{7}{8}$ . Дробная часть уменьшаемого равна вычитаемому. Понятно, что, если отъ 2 цѣлыхъ единицъ и 7 восьмыхъ долей отнять эти 7 восьмыхъ долей, то останутся 2 цѣлыя единицы:

$$2\frac{7}{8} - \frac{7}{8} = 2.$$

**Случай 2.** Вычтемъ изъ  $5\frac{5}{8}$  дробь  $\frac{3}{4}$ . Дробная часть уменьшаемого не равна, а больше вычитаемого. Приводимъ обѣ дроби къ одному знаменателю; общимъ знаменателемъ будетъ 12:

$$5\frac{5}{8} = 5\frac{10}{12}, \quad \frac{3}{4} = \frac{9}{12}.$$

Послѣ приведенія къ одному знаменателю оказалось, что дробь уменьшаемого превратилась въ  $\frac{10}{12}$ , а вычитаемое — въ  $\frac{9}{12}$ ; слѣдовательно, разность будетъ состоять изъ 5 цѣлыхъ единицъ и еще изъ  $\frac{1}{12}$  доли:

$$5\frac{10}{12} - \frac{9}{12} = 5\frac{10-9}{12} = 5\frac{1}{12}.$$

**Случай 3.** Возьмемъ для примѣра выраженіе:  $4\frac{7}{12} - \frac{9}{10}$ .



Приводимъ обѣ дроби къ одному знаменателю; общимъ знаменателемъ будетъ 60:

$$4\frac{7}{12} = \frac{35}{60} + \frac{9}{10} = \frac{54}{60}.$$

Дробь уменьшаемаго меньше вычитаемаго, ибо  $\frac{35}{60}$  меньше  $\frac{54}{60}$ . Чтобы вычесть эти числа, надо отъ уменьшаемаго взять еще одну цѣлую единицу и раздробить ее тоже въ шестидесятыя доли. Уменьшаемое тогда будетъ состоять изъ 3 цѣлыхъ единицъ и изъ 60 шестидесятыхъ да еще изъ 35 шестидесятыхъ:  $4\frac{35}{60} = 3\frac{60+35}{60} = 3\frac{95}{60}$ . Вычтемъ теперь изъ  $3\frac{95}{60}$  дробь  $\frac{54}{60}$ :

$$3\frac{95}{60} - \frac{54}{60} = 3\frac{95-54}{60} = 3\frac{41}{60}.$$

Зная, какъ вычитаются дроби изъ цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ, весьма нетрудно производить вычитаніе смѣшанныхъ чиселъ: *сначала вычитаются отдѣльно ихъ дробныя части, а затѣмъ цѣлыя*. Напримѣръ:

$$6\frac{4}{5} - 2\frac{1}{2} = 6\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} - 2\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = 6\frac{8}{10} - 2\frac{5}{10} = 4\frac{3}{10};$$

$$12\frac{8}{6} - 5\frac{5}{12} = 12\frac{8 \cdot 2}{6 \cdot 2} - 5\frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = 12\frac{16}{24} - 5\frac{10}{24} = 11\frac{24+16-10}{24} = 11\frac{30}{24} = 11\frac{5}{4} = 12\frac{1}{4}.$$

### УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Рѣшить формулу:  $(15\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4}) + (2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4})$ .

$$1) 15\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4} = 15\frac{6}{4} - 3\frac{1}{4} = 11\frac{5}{4};$$

$$2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 1\frac{0}{4}; \quad 11\frac{5}{4} + 1\frac{0}{4} = 12\frac{5}{4} = 12\frac{1}{4}.$$

2) Какое число надо прибавить къ  $1\frac{1}{12}$ , чтобы получить  $1\frac{1}{4}$ ?

$$2) 1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{12} = 1\frac{3}{12} - 1\frac{1}{12} = 1\frac{2}{12} = 1\frac{1}{6}.$$

3) Фунтъ чаю 1-го сорта стоитъ  $4\frac{7}{16}$  рубль; фунтъ чаю 2-го сорта стоитъ на  $1\frac{1}{4}$  руб. дешевле. Сколько стоитъ фунтъ чаю 2-го сорта?

$$3) 4\frac{7}{16} \text{ руб.} - 1\frac{1}{4} \text{ руб.} = 4\frac{7}{16} - 1\frac{4}{16} = 2\frac{3}{16} \text{ руб.}$$

4) Купецъ продалъ кусокъ сукна за  $230\frac{1}{15}$  рубля; при этомъ онъ получилъ  $25\frac{1}{3}$  рубля прибыли. Сколько стоилъ кусокъ сукна самому купцу?

$$4) 230\frac{1}{15} \text{ руб.} - 25\frac{1}{3} \text{ руб.} = 230\frac{2}{30} - 25\frac{10}{30} = 204\frac{20}{30} = 204\frac{2}{3} \text{ руб.}$$

### Умноженіе дробей.

Умножить одно цѣлое число на другое цѣлое значить повторить первое слагаемымъ столько разъ,

сколько во второмъ единиць.

Умножить дробь на цѣлое число тоже значить повторить эту дробь слагаемымъ столько разъ, сколько въ цѣломъ числѣ единицъ. Такъ,  $\frac{2}{3}$  умножить на 3 значить повторить дробь  $\frac{2}{3}$  слагаемымъ 3 раза. Написавъ  $\frac{2}{3}$  слагаемымъ три раза, мы въ суммѣ получимъ:  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3}$ .

Отсюда мы видимъ, что при умноженіи дроби на цѣлое число знаменатель дроби остается тѣмъ же, а числитель увеличивается во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ. Умноженіе дроби  $\frac{2}{3}$  на 3 слѣдуетъ поэтому обозначать такъ:  $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{6}{3}$ .

Итакъ, чтобы умножить дробь на цѣлое число, надо числителя дроби умножить на это цѣлое число и подъ полученнымъ произведеніемъ подписать знаменателя дроби.

Произведеніе  $\frac{6}{9}$ , однако, не есть еще окончательный результатъ, ибо его слѣдуетъ сократить; 6 и 9 сокращаются на 3, т.-е.:  $\frac{6 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3}$ .



Вмѣсто того, чтобы сокращать дробь  $\frac{6}{9}$ , можно было произвести сокращеніе въ выраженіи  $\frac{2 \cdot 3}{9}$ . Разсматривая это выраженіе, какъ дробь, можно было числителя его и знаменателя раздѣлить на одно и то же число 3, отъ чего величина всего выраженія не измѣнилась бы, конечно. Сокращеніе это мы обозначили бы слѣдующимъ образомъ:  $\frac{2 \cdot 3}{9_3} = \frac{2}{3}$ .

Вообще, при умноженіи дроби на цѣлое число слѣдуетъ прежде, нежели произвести дѣйствіе, сдѣлать указаннымъ образомъ сокращеніе, если такое сокращеніе, конечно, возможно.

Этимъ сокращеніемъ значительно облегчается нахожденіе конечнаго результата, въ особенности тогда, когда числа большія. Возьмемъ для примѣра еще умноженіе дроби  $\frac{31}{625}$  на 250:

$$\frac{31}{625} \times 250 = \frac{31 \cdot 250}{625}$$

Вмѣсто того, чтобы теперь умножать 31 на 250, гораздо удобнѣе сократить число 250 и знаменателя 625 на ихъ общаго дѣлителя 125, а затѣмъ уже приступить къ умноженію:

$$\frac{31}{625} \times 250 = \frac{31 \cdot 250^2}{625_5} = \frac{62}{5} = 12\frac{2}{5}$$

При такомъ сокращеніи сокращаемыя числа перечеркиваются, и подъ ними ставится частное отъ дѣленія ихъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Умножить какое-либо число (дробное или цѣлое) на дробь значитъ найти дробь множимаго, т.-е. взять отъ множимаго такую часть, какую указываетъ множитель. Умножить  $\frac{3}{4}$  на  $\frac{1}{2}$  значитъ взять половину отъ трехъ четвертей; умножить 8 на  $\frac{3}{8}$  значитъ взять три восьмыхъ части отъ восьми.

Разсмотримъ послѣдній примѣръ. Намъ надо найти  $\frac{3}{8}$  части отъ восьми. Найдемъ раньше одну восьмую отъ восьми; для этого надо восемь раздѣлить на восемь:  $\frac{8}{8}$ . Чтобы найти три восьмыхъ части отъ восьми, надо  $\frac{8}{8}$  помножить на три:  $\frac{8 \cdot 3}{8} = \frac{24}{8} = 3$ .

Вообще, чтобы найти дробь даннаго числа, надо данное число раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ знаменателѣ дроби, и полученное частное увеличить во столько разъ, сколько единицъ въ числителѣ дроби.

При умноженіи цѣлаго числа на дробь цѣлое число слѣдуетъ раньше сократить съ знаменателемъ дроби, если такое сокращеніе возможно.

Такимъ же образомъ поступаютъ и при умноженіи дроби на дробь. Умножить дробь  $\frac{3}{4}$  на дробь  $\frac{5}{6}$  значитъ найти  $\frac{5}{6}$  отъ  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{1}{6}$  отъ  $\frac{3}{4}$  равна  $\frac{1}{8}$ , уменьшеннымъ въ 6 разъ, т.-е.  $\frac{1}{6}$  числа  $\frac{3}{4} = \frac{3}{4 \cdot 6} = \frac{3}{24}$ , а 5 такихъ шестыхъ будутъ въ 5 разъ больше:  $\frac{5}{6}$  числа  $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ .

И: въ этомъ примѣра мы видимъ, что для нахожденія дроби  $\frac{3}{4}$  отъ дроби  $\frac{5}{6}$  намъ пришлось умножить числителя первой дроби на числителя второй (3 . 5) и знаменателя первой дроби на знаменателя второй (4 . 6).

Итакъ, чтобы умножить дробь на дробь, достаточно перемножить ихъ числителей — это дастъ числителя произведенія, а затѣмъ перемножить ихъ знаменателей — это дастъ знаменателя произведенія.



Такъ же поступаютъ и при умноженіи нѣсколькихъ дробей.

Въ нашемъ примѣрѣ умноженія дроби на дробь мы произвели сокращеніе уже послѣ того, какъ нашли результатъ. Можно было, однако, не перемножая числителей и знаменателей, сократить выраженіе  $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}$  на 3; въ числитель останется послѣ этого 1.5, а въ знаменатель 4 : 2:

$$\frac{1.5}{4 : 2} = \frac{5}{8}.$$

Дробь  $\frac{3}{4}$  несократимая, дробь  $\frac{5}{6}$  тоже несократимая, но въ произведеніи онѣ даютъ дробь, сокращающуюся на 3, ибо числитель первой и знаменатель второй дѣлятся на 3. Отсюда видно, что при умноженіи дроби на дробь *числитель одной можетъ сокращаться съ знаменателемъ другой а знаменатель первой съ числителемъ второй.*

Мы уже знаемъ, что умножить какое-либо число на дробь значитъ найти эту дробь множимаго. Въ такомъ случаѣ произведеніе должно быть меньше множимаго. На самомъ дѣлѣ, умноживъ число 8 на  $\frac{3}{8}$ , мы нашли  $\frac{3}{8}$  части числа 8; въ произведеніи получилось число 3, которое меньше множимаго 8.

Подобное наблюдается, однако, только тогда, когда множителемъ служить *правильная дробь*. Если же множителемъ является *неправильная дробь*, то произведеніе окажется больше множимаго. Такъ, умноживъ число 8 на неправильную дробь  $\frac{15}{2}$ , мы получимъ:  $8 \times \frac{15}{2} = \frac{4 \cdot 15}{1} = 60$ .

Произведеніе 60 гораздо больше множимаго 8. Объясняется это тѣмъ, что, умножая на дробь, большую единицы, мы уже находимъ не часть множимаго, а число, состоящее изъ большаго количества долей, нежели множимое: въ 8 имѣются только 4 вторыхъ доли, а, умножая 8 на  $\frac{15}{2}$ , мы отыскиваемъ число, которое имѣло бы 15 такихъ вторыхъ долей.

Все только что сказанное объ умноженіи на дробь справедливо, какъ при умноженіи цѣлаго числа на дробь, такъ и при умноженіи дроби на дробь, и можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ: *отъ умноженія какого угодно числа на правильную дробь оно уменьшается; отъ умноженія на неправильную дробь — число увеличивается.*

## УПРАЖНЕНІЯ.

Умножить:

- 1)  $\frac{3}{4}$  на 3.
- 2)  $\frac{3}{16}$  на 4.
- 3) 5 на  $\frac{1}{4}$ .
- 4) 12 на  $\frac{5}{8}$ .
- 5)  $\frac{15}{11}$  на  $\frac{1}{4}$ .
- 6)  $\frac{1}{8}$  на  $\frac{16}{21}$ .
- 7) 3 на  $\frac{11}{9}$ .
- 8) 7 на  $\frac{2}{7}$ .
- 9)  $\frac{9}{5}$  на  $\frac{1}{2}$ .
- 10)  $\frac{63}{5}$  на  $\frac{25}{9}$ .

Рѣшенія:

- 1)  $\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ .
- 2) *Отв.*  $\frac{3}{4}$ .
- 3) *Отв.*  $1\frac{1}{4}$ .
- 4) *Отв.* 10.
- 5)  $\frac{15}{11} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15 \cdot 1}{44} = \frac{15}{44}$ .
- 6) *Отв.*  $\frac{2}{7}$ .
- 7) *Отв.*  $3\frac{1}{3}$ .
- 8) *Отв.* 9.
- 9) *Отв.*  $6\frac{3}{10}$ .
- 10) *Отв.* 35.



**Умноженіе смѣшанныхъ чиселъ.** Пусть намъ дано умножить  $\frac{1}{3}$  на  $4\frac{1}{7}$ . Это значить дробь  $\frac{1}{3}$  повторить слагаемымъ 4 раза и взять потомъ еще  $\frac{1}{7}$  часть ся. Такимъ образомъ, надо было бы сначала дробь  $\frac{1}{3}$  умножить на 4, а потомъ умножить ее на  $\frac{1}{7}$  и оба произведенія сложить. Но вмѣсто того, чтобы разсматривать смѣшанное число, какъ сумму цѣлаго числа съ дробью, его можно разсматривать, какъ неправильную дробь, и число  $4\frac{1}{7}$  представить въ видѣ неправильной дроби  $\frac{29}{7}$ . Обративъ смѣшанное число въ неправильную дробь, на него можно умножить какое угодно число, какъ на дробь вообще.

Итакъ,  $\frac{1}{3}$  умножить на  $4\frac{1}{7}$  все равно, что  $\frac{1}{3}$  умножить на  $\frac{29}{7}$ :

$$\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{29}{7} = \frac{29}{21} = 1\frac{8}{21}.$$

При умноженіи смѣшаннаго числа на дробь или на цѣлое число поступаютъ такимъ же образомъ; на примѣръ:  $4\frac{1}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{29}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{29}{21} = 1\frac{8}{21}$ ;  $4\frac{1}{7} \times 3 = \frac{29}{7} \times 3 = \frac{29 \cdot 3}{7} = \frac{87}{7} = 12\frac{3}{7}$ .

При умноженіи смѣшаннаго числа на смѣшанное же надо обоимъ сомножителей обратить въ неправильныя дроби; на примѣръ:  $3\frac{1}{4} \times 5\frac{2}{3} = \frac{13}{4} \times \frac{17}{3} = \frac{13 \cdot 17}{4 \cdot 3} = \frac{221}{12} = 18\frac{5}{12}$ .

## УПРАЖНЕНІЯ.

Умножить:

- 1)  $7\frac{1}{2}$  на  $1\frac{3}{4}$ .
- 2)  $1\frac{1}{8}$  на  $7\frac{1}{2}$ .
- 3)  $5\frac{1}{4}$  на  $\frac{7}{12}$ .
- 4)  $\frac{11}{15}$  на  $1\frac{1}{8}$ .
- 5)  $12\frac{3}{4}$  на 7.

Рѣшенія:

- 1)  $7\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 4} = 3 \cdot 4 = 12$ .
- 2) *Отв.*  $14\frac{7}{12}$ .
- 3) *Отв.* 3.
- 4)  $\frac{11}{15} \cdot 1\frac{1}{8} = \frac{11}{15} \cdot \frac{15}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$ .
- 5) *Отв.* 89.

**Примѣры задачъ на дроби, рѣшаемыхъ умноженіемъ.**

**Задача 1.** Фунтъ чаю стоитъ  $2\frac{4}{5}$  рубля. Сколько надо заплатить за  $7\frac{7}{10}$  фунта?

За  $7\frac{7}{10}$  фунта надо, понятно, заплатить въ  $7\frac{7}{10}$  разъ больше. Умножаемъ  $2\frac{4}{5}$  руб. на  $7\frac{7}{10}$ :

$$2\frac{4}{5} \text{ руб.} \times 7\frac{7}{10} = \frac{14}{5} \text{ руб.} \times \frac{77}{10} = \frac{14 \cdot 77}{5 \cdot 10_5} = \frac{539}{25} = 21\frac{14}{25} \text{ рубля.}$$

Наподобіе этой задачи рѣшаются *всѣ задачи на дроби, когда требуется одно число повторить слагаемымъ нѣсколько разъ.*

**Задача 2.** Нѣкто издержалъ  $\frac{5}{7}$  своихъ денегъ на покупку книгъ и  $\frac{2}{5}$  остатка на покупку бумаги. Какая часть денегъ у него осталась послѣ покупки бумаги?

Вся сумма денегъ представляетъ изъ себя какую-то цѣлую единицу. Отъ этой единицы на покупку книгъ взято 5 седьмыхъ долей; слѣдовательно, послѣ покупки книгъ осталось:  $1 - \frac{5}{7} = \frac{7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$  доли.

На покупку бумаги взято было 2 пятыхъ отъ оставшихся 2-хъ седьмыхъ. Чтобы узнать, какую часть *всей суммы* взял онъ на покупку бумаги, надо найти  $\frac{2}{5}$  части отъ дроби  $\frac{2}{7}$ , т.-е. надо умножить  $\frac{2}{7}$  на  $\frac{2}{5}$ ;  $\frac{2}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$ .



Послѣ покупки книгъ остались  $\frac{2}{7}$  части всей суммы; на бумагу взято было  $\frac{4}{35}$  части всей суммы; слѣдовательно, послѣ покупки бумаги остались:  $\frac{2}{7}$  части —  $\frac{4}{35}$  части =  $\frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} - \frac{4}{35} = \frac{10 - 4}{35} = \frac{6}{35}$  части.

Наподобіе задачи 2-й рѣшаются *всѣ задачи, въ которыхъ требуется найти какую-нибудь часть даннаго числа.*

### УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Купили 12 головъ сахару, вѣсомъ по  $12\frac{1}{2}$  фунта каждая, цѣною по  $\frac{7}{50}$  рубля за фунтъ. Сколько стоилъ весь купленный сахаръ?

$$1) 12\frac{1}{2} \text{ ф.} \times 12 = \frac{51}{4} \cdot 12 = \frac{51 \cdot 12}{4} = 153 \text{ ф.};$$

$$\frac{7}{50} \text{ р.} \times 153 = \frac{7 \cdot 153}{50} = \frac{1071}{50} = 21\frac{21}{50} \text{ р.}$$

2) Нѣкто получилъ въ наслѣдство 24 десятины земли:  $\frac{7}{12}$  всего этого количества земли составляли поля,  $\frac{1}{3}$  луга, а остальная земля занята была лѣсомъ. Сколько десятинъ лѣса было у него?

$$2) 24 \text{ д.} \times \frac{7}{12} = \frac{24 \cdot 7}{12} = 14 \text{ д.}; 24 \text{ д.} \times \frac{1}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ д.}; 24 \text{ д.} - 14 \text{ д.} - 8 \text{ д.} = 2 \text{ д.}$$

3) Сыну 26 лѣтъ; отецъ въ  $2\frac{2}{13}$  раза старше сына, а лѣта дочери составляютъ  $\frac{11}{14}$  суммы лѣтъ отца и сына. Сколько лѣтъ дочери?

$$3) 26 \text{ л.} \times 2\frac{2}{13} = 26 \cdot \frac{28}{13} = \frac{26 \cdot 28}{13} = 56 \text{ л.}; 56 \text{ л.} + 26 \text{ л.} = 82 \text{ л.}; 82 \text{ л.} \times \frac{11}{14} = \frac{82 \cdot 11}{14} = 64\frac{2}{7} \text{ л.}$$

### Дѣленіе дробей.

Мы знаемъ уже, что, если раздѣлить меньшее изъ двухъ цѣлыхъ чиселъ на большее, то въ частномъ получается дробь, числителемъ которой является меньшее число, а знаменателемъ большее. Отъ дѣленія 5 на 7 получается въ частномъ дробь  $\frac{5}{7}$ . Вообще, если раздѣлить одно на другое два какихъ угодно цѣлыхъ числа, то частное отъ этого дѣленія можно представить въ видѣ дроби. Такъ,  $12 : 5 = \frac{12}{5}$ ;  $15 : 5 = \frac{15}{5}$  и т. д.

На этомъ-то основаніи всякую дробь можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ одно является числителемъ дроби, а другое—ея знаменателемъ.

Раздѣлить одно цѣлое число на другое цѣлое значить узнать, сколько разъ второе содержится въ первомъ, или же это значить раздѣлить первое на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ другомъ. *Раздѣлить дробь на цѣлое число тоже значить раздѣлить эту дробь на нѣсколько равныхъ частей.*

Напримѣръ,  $\frac{6}{7}$  раздѣлить на 3 значить разбить 6 седьмыхъ долей на 3 равныя части, или, что то же самое, уменьшить 6 седьмыхъ долей въ три раза. Понятно, что каждая такая часть будетъ состоять изъ двухъ седьмыхъ долей, т.-е., чтобы раздѣлить дробь  $\frac{6}{7}$  на 3, достаточно числителя 6 раздѣлить на 3.

Мы, однако, знаемъ, что для того, чтобы уменьшить дробь въ нѣсколько разъ, можно или раздѣлить числителя, или умножить знаменателя. Поэтому



для того, чтобы раздѣлить  $\frac{6}{7}$  на 3, можно было еще знаменателя 7 умножить на 3. Итакъ:  $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$ , или  $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7:3} = \frac{6:3}{21} = \frac{2}{7}$ .

**Правило 1-ое.** Чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, достаточно раздѣлить на это число числителя дроби или умножить на него знаменателя дроби (если числитель не дѣлится).

Примѣры:  $\frac{8}{15} : 4 = \frac{8:4}{15} = \frac{2}{15}$  (здѣсь удобно дѣлить числителя на 4);  
 $\frac{5}{8} : 4 = \frac{5}{8:4} = \frac{5}{32}$  (здѣсь слѣдуетъ умножить знаменатель на 4).

Пусть теперь намъ дано раздѣлить цѣлое число 2 на дробь  $\frac{3}{5}$ . Раздѣлить 2 на  $\frac{3}{5}$  значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на  $\frac{3}{5}$ , дастъ 2 (дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное). Но умножить какое бы то ни было число на дробь значитъ найти дробь этого числа. Отъ умноженія искомага числа на  $\frac{3}{5}$  мы найдемъ  $\frac{3}{5}$  его, которыя равны 2-мъ. Итакъ,  $\frac{3}{5}$  части искомага числа = 2;  $\frac{1}{5}$  часть его будетъ въ 3 раза меньше, т.-е.  $\frac{2}{3}$ , а  $\frac{5}{5}$  частей его (или все число) будутъ равны:  $\frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ .

Частное отъ дѣленія 2 на  $\frac{3}{5}$  равно  $3\frac{1}{3}$ . Присматриваясь къ тому, какъ образовалось это частное, мы видимъ, что число 2 сначала раздѣлено было на 3, и полученное число затѣмъ умножено было на 5, т.-е. число 2 раздѣлено было на числителя дроби и умножено на знаменателя дроби.

Чтобы раздѣлить дробь  $\frac{4}{5}$ , на примѣръ, на дробь  $\frac{3}{8}$ , рассуждаемъ какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, и поступаемъ точно такъ же:  $\frac{3}{8}$  части искомага числа =  $\frac{4}{5}$ ;  $\frac{1}{8}$  часть его будетъ въ 3 раза меньше:  $\frac{4}{5:3}$ , а  $\frac{8}{8}$  частей его (или все число) будутъ равны:  $\frac{4 \cdot 8}{5:3} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$ .

**Правило 2-ое.** Чтобы раздѣлить цѣлое число на дробь, надо это цѣлое число умножить на знаменателя дроби и произведеніе раздѣлить на числителя дроби; чтобы раздѣлить дробь на дробь, надо числителя первой дроби умножить на знаменателя второй и знаменателя первой на числителя второй.

Если въ дроби  $\frac{3}{5}$  перемѣнить мѣстами числителя и знаменателя, получится дробь  $\frac{5}{3}$ , которая называется **обратной** дробью.

Также дробь  $\frac{3}{5}$  будетъ обратной по отношенію къ дроби  $\frac{5}{3}$ .

При дѣленіи числа 2 на дробь  $\frac{3}{5}$  мы 2 умножили на 5 и раздѣлили на 3; иначе говоря, мы 2 умножили на дробь, обратную дѣлителю, на  $\frac{5}{3}$ ; при дѣленіи  $\frac{4}{5}$  на  $\frac{3}{8}$  мы  $\frac{4}{5}$  тоже, въ концѣ концовъ, умножили на обратную дробь  $\frac{8}{3}$ . Исходя изъ этого, правило дѣленія на дробь можно выразить такъ:

**Правило 3-ье.** Чтобы раздѣлить какое угодно число на дробь, достаточно дѣлимое умножить на дробь, обратную дѣлителю.

Изъ обоихъ взятыхъ нами примѣровъ видно еще и то, что раздѣлить какое-нибудь число на дробь значитъ найти цѣлое по данной его части. Нахожденіе цѣлаго по его части можетъ быть поэтому выполнено посредствомъ дѣленія.

А такъ какъ цѣлое, конечно, больше своей части, то при дѣленіи какого-либо числа на дробь оно увеличивается. Это бываетъ, конечно, въ



томъ случаѣ, если дѣлителемъ служить *правильная дробь*. Если же дѣлитель *дробь неправильная*, то дѣлимое уменьшается. Такъ, раздѣлить 15 на  $\frac{3}{5}$  значить найти число,  $\frac{3}{5}$  котораго равны 15; частное отъ этого дѣленія должно быть больше дѣлимаго 15, а именно  $15 : \frac{3}{5} = \frac{15 \cdot 5}{3} = \frac{75}{3} = 25$ .

Однако, раздѣлить 15 на  $\frac{5}{3}$ , это будетъ означать, что надо отыскать число,  $\frac{5}{3}$  котораго равны 15. Въ числѣ 15 имѣются  $\frac{5}{3}$  части; слѣдовательно,  $\frac{3}{5}$  его составлять число, меньшее 15, и частное отъ дѣленія 15 на  $\frac{5}{3}$  будетъ меньше дѣлимаго:  $15 : \frac{5}{3} = \frac{15 \cdot 3}{5} = \frac{45}{5} = 9$ .

Въ примѣрѣ  $15 : \frac{3}{5}$  можно было, вмѣсто того, чтобы умножать 15 на 5 и полученное произведеніе дѣлить на 3,—сократить 15 съ 3, т.-е. цѣлое число съ *числителемъ* данной дроби; это облегчило бы полученіе окончательнаго результата:  $15 : \frac{3}{5} = \frac{15 \cdot 5}{3} = 25$ .

При дѣленіи дроби на дробь также возможно сокращеніе. Напримѣръ, раздѣливъ  $\frac{4}{15}$  на  $\frac{2}{5}$ , мы получимъ:  $\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 2}$ . Вмѣсто того, чтобы теперь перемножить 4 и 5, 15 и 2, можно числителя выраженія  $\frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 2}$  сократить съ знаменателемъ на 2 и еще на 5; 4 и 2 сокращаются на 2, и 5 и 15 сокращаются на 5. Отъ такого сокращенія величина дроби, конечно, не измѣнится. Итакъ, числитель первой дроби сокращается съ *числителемъ* второй, а знаменатель первой съ *знаменателемъ* второй:

$$\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = \frac{\frac{2}{4} \cdot 5}{15 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

*Замѣчаніе.* При дѣленіи смѣшанныхъ чиселъ необходимо обратить ихъ въ неправильныя дроби, а затѣмъ произвести дѣленіе.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Раздѣлить:

- 1)  $\frac{3}{8}$  на 18.
- 2) 7 на  $\frac{7}{11}$ .
- 3) 25 на  $\frac{1}{2}$ .
- 4)  $\frac{1}{2}$  на  $\frac{1}{3}$ .
- 5)  $\frac{11}{12}$  на  $\frac{11}{9}$ .
- 6)  $5\frac{4}{5}$  на 8.
- 7) 18 на  $2\frac{1}{2}$ .
- 8)  $4\frac{1}{2}$  на  $2\frac{1}{10}$ .
- 9)  $8\frac{1}{2}$  на  $1\frac{1}{2}$ .

Рѣшенія:

- 1)  $\frac{3}{8} : 18 = \frac{3}{28 \cdot 18} = \frac{3}{56}$ .
- 2) *Отв.* 11.
- 3) *Отв.* 20.
- 4) *Отв.*  $\frac{3}{2}$ .
- 5)  $\frac{11}{12} : \frac{11}{9} = \frac{11 \cdot 3}{24 \cdot 11} = \frac{1}{4}$ .
- 6) *Отв.*  $\frac{49}{2}$ .
- 7) *Отв.* 8.
- 8) *Отв.* 2.
- 9) *Отв.*  $4\frac{1}{2}$ .

**Примѣры задачъ на дроби, рѣшаемыхъ дѣленіемъ.**

**Задача 1.** За  $5\frac{1}{2}$  аршина матеріи заплачено  $26\frac{1}{2}$  руб. Сколько стоитъ одинъ аршинъ этой матеріи?



Если  $5\frac{1}{4}$  арш. стоятъ  $26\frac{1}{4}$  руб., то одинъ аршинъ стоитъ въ  $5\frac{1}{4}$  разъ меньше; поэтому надо  $26\frac{1}{4}$  раздѣлить на  $5\frac{1}{4}$ :

$$26\frac{1}{4} \text{ руб.} : 5\frac{1}{4} = \frac{105}{4} : \frac{21}{4} = \frac{105 \cdot 4}{4 \cdot 21} = 5 \text{ руб.}$$

**Задача 2.**  $\frac{5}{8}$  фунта чаю стоятъ  $2\frac{1}{2}$  руб. Сколько стоитъ фунтъ этого чаю?

Въ фунтѣ имѣется 8 восьмыхъ долей; слѣдовательно, фунтъ чаю долженъ стоить больше, чѣмъ  $\frac{5}{8}$  фунта. Намъ, такимъ образомъ, надо найти число,  $\frac{5}{8}$  котораго равны  $2\frac{1}{2}$ , т.-е. найти цѣлое по данной его части, что выполняется дѣленіемъ:

$$2\frac{1}{2} \text{ руб.} : \frac{5}{8} = \frac{5}{2} : \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 5} = 4 \text{ рубля.}$$

*Всѣ задачи, въ которыхъ требуется отыскать цѣлое по данной части, рѣшаются дѣленіемъ.*

### УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) 15 верстъ составляютъ  $\frac{1}{3}$  пройденнаго пѣшеходомъ пути. Найти величину всего пути.

$$1) 15 \text{ в.} : \frac{1}{3} = 15 \cdot 3 = 75 \text{ в.}$$

2) Какую часть пуда составляетъ 21 фунтъ?

$$2) 21 : 40 = \frac{21}{40} \text{ п.}$$

3) За кусокъ сукна, аршинъ котораго стоитъ 24 руб., заплатили 162 руб. Сколько аршинъ было въ этомъ кускѣ?

$$3) 162 \text{ руб.} : 24 = 162 : \frac{2}{1} = \frac{162 \cdot 1}{2} = 81 \text{ арш.}$$

4) 5 работниковъ одинаковой силы сдѣлали нѣкоторую работу въ 3 дня. Во сколько дней могли бы сдѣлать эту работу 2 работника такой же силы? (Вся работа принимается за единицу).

$$4) 1 : 5 = \frac{1}{5}; \frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{15}; \frac{1}{15} \cdot 2 = \frac{2}{15}; 1 : \frac{2}{15} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ дней.}$$

5) Найти число,  $\frac{3}{11}$  котораго равны  $\frac{2}{5}$  числа 81.

$$5) 81 \cdot \frac{3}{5} = \frac{81 \cdot 3}{5} = 45; 45 : \frac{3}{11} = \frac{45 \cdot 11}{3} = 165.$$



## ОТДѢЛЪ V. ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ.

### ГЛАВА 1-ая.

#### § 35. Происхожденіе десятичныхъ дробей.

Всякая дробь происходитъ отъ дѣленія какой-нибудь цѣлой единицы на нѣсколько равныхъ долей. Такимъ же образомъ, конечно, происходятъ и тѣ дроби, знаменателемъ которыхъ являются единицы съ нулями. Такъ, дробь  $\frac{1}{10}$  произошла отъ дѣленія единицы на 10 долей, дробь  $\frac{1}{100}$  отъ дѣленія единицы на 100 долей и т. д. *Десятая, сотая, тысячная и т. п. доли называются десятичными долями*, а дроби, состоящія изъ одной или нѣсколькихъ десятичныхъ долей, называются **десятичными дробями** (напр.:  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{3}{100}$ ,  $\frac{5}{1000}$ ,  $\frac{14}{10000}$  и т. д.).

Надъ десятичными дробями дѣйствія производятся точно такъ же, какъ и надъ всѣми другими, и онѣ ничѣмъ особенно не отличаются отъ прочихъ дробей.

Но десятичныя дроби обладаютъ нѣкоторыми свойствами, которыя позволяютъ упрощать дѣйствія надъ ними и облегчать вычисленія. Поэтому въ ариѳметикѣ десятичныя дроби выдѣляются въ особую группу изъ общаго числа дробей. *Всякія другія дроби, въ отличіе отъ десятичныхъ, называются обыкновенными.*

#### § 36. Изображеніе десятичной дроби.

Десятичная дробь *одна десятая* можетъ быть изображена въ видѣ  $\frac{1}{10}$ ; десятичная дробь *тридцать одна сотая* въ видѣ  $\frac{31}{100}$ ; иначе говоря, десятичная дробь изображается, какъ и всякая обыкновенная, въ видѣ числителя, раздѣленнаго на знаменателя. Мы, однако, знаемъ, что чѣмъ знаменатель больше, тѣмъ на меньшія доли раздѣлена единица: *сотая доля въ десять разъ меньше десятой, тысячная въ десять разъ меньше сотой* и т. д. Далѣе, мы знаемъ, что цѣлыя числа изображаются такъ, что изъ двухъ рядомъ стоящихъ цифръ правая обозначаетъ единицы, въ десять разъ меньшія, нежели лѣвая. Наименьшимъ изъ цѣлыхъ разрядовъ считаются простыя единицы, которыя въ десять разъ меньше десятковъ; десятки въ десять разъ меньше сотенъ и т. д. Что же въ десять разъ меньше простой единицы? Конечно, десятая доля ея. Что въ десять разъ меньше десятой доли единицы? Сотая доля ея. Вотъ на этомъ основаніи десятичныя доли изображаются не въ



видѣ обыкновенныхъ дробей, а наподобіе цѣлыхъ чиселъ: десятичныя доли, какъ отдѣльные разряды, пишутся направо отъ цѣлыхъ единицъ, отдѣляясь отъ послѣднихъ только запятой.

Пусть намъ надо написать, на примѣръ, число  $352\frac{11}{100}$ . Такъ какъ  $\frac{11}{100}$  равно  $\frac{10}{100} + \frac{1}{100}$  или  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100}$ , то мы можемъ сказать, что надо написать такое число, которое содержитъ три сотни, пять десятковъ, двѣ единицы, одну десятую долю единицы и одну сотую долю ея. Пишется число это такъ:

352,11

Цифра 3 стоитъ на мѣстѣ сотенъ, цифра 5—на мѣстѣ десятковъ, цифра 2—на мѣстѣ простыхъ единицъ, цифра 1—на мѣстѣ десятыхъ долей, вторая цифра 1—на мѣстѣ сотыхъ долей, и каждая правая изъ этихъ цифръ обозначаетъ разрядъ, въ 10 разъ меньшій, нежели цифра, стоящая влѣво отъ нея; цифры, обозначающія десятичныя доли, отдѣляются отъ цифръ, обозначающихъ цѣлыя единицы, запятой и называются **десятичными знаками**.

Только что написанное нами число 352,11 можно прочесть двоякимъ образомъ: 1) триста пятьдесятъ двѣ цѣлыхъ единицы, одна десятая единицы и одна сотая, или 2) триста пятьдесятъ двѣ цѣлыхъ и одиннадцать сотыхъ.

Когда цѣлага числа нѣтъ, на его мѣстѣ пишется 0; на примѣръ, число, состоящее только изъ одной десятой доли, двухъ сотыхъ и трехъ тысячныхъ, изображается такъ:

0,123 (читается: нуль цѣлыхъ, сто двадцать три тысячныхъ).

На мѣстѣ недостающихъ десятичныхъ долей тоже ставятся нули; на примѣръ, число 0,02 обозначаетъ нуль цѣлыхъ и двѣ сотыхъ доли; на мѣстѣ недостающихъ десятыхъ долей стоитъ нуль.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Вопросы:

1) Прочтите дроби: 0,31; 0,08; 0,058; 231,306; 7,0032.

2) Напишите дроби: тридцать семь сотыхъ; десять цѣлыхъ четыре десятыхъ; восемь цѣлыхъ пятьдесятъ три тысячныхъ; шесть цѣлыхъ девять сотыхъ; тринадцать сотыхъ; пять цѣлыхъ тысяча восемьсотъ семьдесятъ двѣ десятичныхъ.

Отвѣты:

1) Нуль цѣлыхъ тридцать одна сотая; нуль цѣлыхъ восемь сотыхъ; нуль цѣлыхъ пятьдесятъ восемь тысячныхъ; двѣсти тридцать одна цѣлая триста шесть тысячныхъ; семь цѣлыхъ тридцать двѣ десятичныхъ.

2) 0,37; 10,4; 8,053; 6,00009; 0,13; 5,1872.

### § 37. Измѣненіе величины десятичной дроби.

Возьмемъ дробь 3,5. Такъ какъ пять десятыхъ долей по величинѣ равняются пятидесяти сотымъ, то можно написать, что дробь 3,5 равна 3,50. На томъ же основаніи  $3,5 = 3,500$  (3 цѣлымъ и пятистамъ тысячныхъ)



и 3,5000 (3 цѣлымъ и пяти тысячамъ десятидесятыхъ) и т. д. Т.-е. *отъ приписыванія нулей справа къ десятичной дроби величина ея не измѣняется.*

Точно также, если зачеркнуть справа десятичной дроби нѣсколько нулей, величина ея не измѣнится. Такъ, дробь 0,60 (шестьдесятъ сотыхъ) = дробь 0,6 (шесть десятыхъ), ибо изъ 60 сотыхъ можно составить 6 десятыхъ\*).

Такъ какъ десятичная дробь разсматривается какъ цѣлое число, и каждый правый десятичный знакъ въ десять разъ меньше лѣваго, то *съ перенесеніемъ запятой* вправо величина дроби должна измѣниться, а именно, увеличиться. Такъ, если въ дроби 0,146 перенести запятую вправо на одинъ знакъ, то получимъ 1,46, и такимъ образомъ цифра 1, которая теперь обозначаетъ *десятыя доли*, будетъ тогда обозначать *цѣлую единицу*; цифра 4, которая теперь обозначаетъ *сотыя доли*, будетъ тогда обозначать *десятыя доли*, и т. д. Но цѣлая единица въ десять разъ больше десятой доли ея, десятая доля въ десять разъ больше сотой, и потому 4 десятыхъ долей въ десять разъ болѣе 4 сотыхъ долей, и т. д. Слѣдовательно, *отъ перенесенія запятой вправо на одинъ знакъ десятичная дробь увеличивается въ десять разъ, на два знака—въ сто разъ, на три знака—въ тысячу разъ* и т. д.

Напримѣръ: отъ перенесенія запятой въ дроби 0,146 вправо на одинъ знакъ получится дробь 1,46, въ десять разъ болѣе дроби 0,146; отъ перенесенія запятой вправо на два знака получится дробь 14,6, въ *сто* разъ болѣе дроби 0,146.

*Если, наоборотъ, запятую перенести влѣво, то дробь должна уменьшиться*, ибо отъ такого перенесенія цѣлыя единицы превращаются въ десятиыя доли, десятиыя доли въ сотыя и т. д. Напримѣръ, дробь 3,15 отъ перенесенія запятой влѣво на одинъ знакъ превращается въ дробь 0,315, на два знака—въ 0,0315, на три знака—въ 0,00315 и т. д.; дробь 0,315 въ 10 разъ меньше дроби 3,15, ибо цифра 3, которая прежде обозначала цѣлыя единицы, теперь обозначаетъ десятиыя доли, цифра единица, которая обозначала десятиыя доли, теперь обозначаетъ сотыя доли и т. д.; по той же причинѣ дробь 0,0315 въ сто разъ меньше дроби 3,15, а дробь 0,00315 въ тысячу разъ меньше дроби 3,15.

Пусть требуется дробь 51,63 увеличить въ 100 разъ. Для этого достаточно запятую перенести на два знака вправо:

число **51,63**, увеличенное въ 100 разъ, равно **5163**.

Пусть требуется эту же дробь 51,63 увеличить въ 1000 разъ. Перенесемъ запятую на три знака вправо; но такъ какъ вправо отъ запятой всего есть два знака, то на концѣ слѣдуетъ приписать ноль:

число **51,63**, увеличенное въ 1000 разъ, равно **51630**.

Чтобы уменьшить дробь 51,63 въ 100 разъ, переносимъ запятую влѣво на два знака и на мѣстѣ цѣлаго числа ставимъ ноль:

число **51,63**, уменьшенное въ 100 разъ, равно **0,5163**.

Чтобы ту же дробь уменьшить въ 1000 разъ, слѣдуетъ запятую перенести

---

\*) Принято въ десятичныхъ дробяхъ нули на концѣ всегда зачеркивать. Въ этомъ и заключается сокращеніе десятичныхъ дробей.



на три знака влѣво; но такъ какъ влѣво отъ запятой имѣются только двѣ цифры, то впереди ихъ слѣдуетъ приписать нуль и еще дальше влѣво нуль на мѣсто цѣлыхъ:

число 51,63, уменьшенное въ 1000 разъ, равно 0,05163.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Вопросы:

1) Увеличить въ 10 разъ каждую изъ слѣдующихъ дробей: 13,15; 0,009; 150,1; 0,0031; 100,01.

2) Увеличить въ 100 разъ дроби: 3,1; 0,004; 3,151; 0,00197; 15,003424.

3) Уменьшить въ 10, 100 и 1000 разъ каждое изъ слѣдующихъ чиселъ: 14,3; 149,23; 30,103; 1935,09; 0,0973; 34,0594; 1294,3; 125,903.

Отвѣты:

1) Нужно перенести запятую на одинъ знакъ вправо, т.-е.: 131,5; 0,09; 1501; 0,031; 1000,1.

2) Нужно перенести запятую на 2 знака вправо, т.-е.: 310; 0,4; 315,1 и т. д.

3) Нужно перенести запятую на 1, 2, 3 знака влѣво; тогда получимъ: 1,43; 0,143; 0,0143; 14,923; 1,4923; 0,14923 и т. д.

## ГЛАВА 2-ая.

### § 38. Дѣйствія надъ десятичными дробями.

Благодаря тому, что десятичныя дроби изображаются какъ цѣлыя числа, дѣйствія надъ ними производятся проще, чѣмъ надъ обыкновенными дробями. Такъ какъ десятичныя дроби изображаются безъ знаменателей, то приводятся онѣ къ общему знаменателю (при сложеніи и вычитаніи) гораздо проще, чѣмъ обыкновенныя. Сокращеніе десятичныхъ дробей тоже весьма просто, и сводится оно къ зачеркиванію нулей на концѣ дробей. Вообще же всѣ дѣйствія надъ десятичными дробями производятся такъ же, какъ надъ цѣлыми числами.

**Сложеніе десятичныхъ дробей.** Пусть дано сложить дроби: 3,53; 13,092 и 215,3. Слагаемыя подписываются одно подъ другимъ, подобіе цѣлыхъ чиселъ, т.-е. такъ, чтобы единицы находились подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д., *десятыя доли подъ десятыми, сотыя подъ сотыми и т. д.:*

$$\begin{array}{r} 3,53 \\ + 13,092 \\ \hline 215,3 \\ \hline 231,922 \end{array}$$

Складываются слагаемыя по разрядамъ отъ низшихъ къ высшимъ. При сложеніи десятичныхъ дробей, очевидно, надо поступать такъ же, какъ при сложеніи цѣлыхъ чиселъ. Въ нашемъ примѣрѣ складываемъ раньше тысячныя доли; получаемъ 2 тысячныхъ доли; 2 подписываемъ подъ столбцомъ тысячныхъ долей. Затѣмъ складываемъ сотыя доли; получаемъ 12 сотыхъ долей, или 1 десятую и 2 сотыхъ доли; 2 подписываемъ подъ сотыми долями, а единицу присоединяемъ къ десятымъ долямъ, и т. д.



Для большей ясности можно число десятичных знаков во всѣхъ слагаемыхъ уравнять, т.-е. къ первому слагаемому справа приписать одинъ 0 и къ третьему—два нуля:

$$\begin{array}{r} 3,530 \\ 13,092 \\ +215,300 \\ \hline 231,922 \end{array}$$

Результатъ получится тотъ же, ибо слагаемая, отъ приписыванія справа нулей, не измѣнились.

Это приписываніе нулей къ десятичнымъ дробямъ и есть не что иное, какъ приведеніе ихъ къ общему знаменателю. Знаменатель перваго слагаемаго (53 сотыхъ)—сто, знаменатель втораго (92 тысячныхъ)—тысяча, и третьяго (3 десятыхъ)—десять. Приписавъ къ первому слагаемому 0, мы обратили его знаменатель въ тысячу (530 тысячныхъ); приписавъ къ третьему два нуля, мы его тоже обратили въ тысячу (300 тысячныхъ).

Точно такъ же и при сложеніи десятичной дроби съ цѣлымъ числомъ можно приписать къ цѣлому числу столько нулей, сколько въ дроби десятичныхъ знаковъ; ибо всякое цѣлое число можно разсматривать какъ десятичную дробь, у которой на мѣстѣ десятичныхъ знаковъ, т.-е. послѣ запятой, стоятъ нули. Сложимъ, напр.,  $3 + 5,11$ :

$$\begin{array}{r} 3,00 \\ + 5,11 \\ \hline 8,11 \end{array}$$

### УПРАЖНЕНІЯ.

Отвѣты:

- 1)  $41,670 + 40,135 + 38,195$ .
- 2)  $10,018 + 13,01 + 6,55 + 11$ .
- 3)  $130 + 138,003 + 139,943$ .

- 1) 120.
- 2) 40,578.
- 3) 407,946.

**Вычитаніе десятичныхъ дробей.**

Вычитаніе десятичныхъ дробей производится такъ же, какъ вычитаніе цѣлыхъ чиселъ: вычитаемое подписывается подъ уменьшаемымъ, и разряды вычитаются отъ низшихъ къ высшимъ. Напримѣръ:

$$\begin{array}{r} 123,4273 \\ - 12,467 \\ \hline 110,9603 \end{array}$$

Десятитысячныхъ въ вычитаемомъ нѣтъ, а потому 3 десятитысячныхъ сносимъ просто въ разность; 7 тысячныхъ изъ 7 дають 0; 6 сотыхъ изъ 2 вычестъ нельзя—занимаемъ 1 десятую и раздробляемъ въ сотыя; также при вычитаніи 4 десятыхъ изъ 3—занимаемъ 1 цѣлую единицу и раздробляемъ въ десятыя доли.



Для большаго удобства можно было къ вычитаемому приписать нуль:

$$\begin{array}{r} 123,4273 \\ - 12,4670 \\ \hline 110,9603 \end{array}$$

### УПРАЖНЕНИЕ.

Рѣшеніе:

Изъ суммы чиселъ 3,753 и 0,2475  
вычесть ихъ разность.

$$\begin{array}{r} 1) \quad + \quad 3,7530 \\ \quad \quad 0,2475 \\ \hline \quad \quad 4,0005 \\ \\ 2) \quad - \quad 3,7530 \\ \quad \quad 0,2475 \\ \hline \quad \quad 3,5055 \\ \\ 3) \quad - \quad 4,0005 \\ \quad \quad 3,5055 \\ \hline \quad \quad 0,4950 = 0,495. \end{array}$$

**Умноженіе десятич-  
ныхъ дробей.**

При умноженіи десятичныхъ дробей бываютъ два случая: 1) когда одинъ изъ сомножителей *цѣлое число* и 2) когда оба сомножителя—*десятичныя дроби*.

Разсмотримъ каждый изъ этихъ случаевъ отдѣльно.

**Случай 1.** Если множителемъ является 10, 100, 1000 или вообще единица съ нулями, то произведеніе получается весьма просто, а именно перенесеніемъ запятой *вправо* на одинъ, два, три и т. д. знака. Напримѣръ, чтобы умножить дробь 2,127 на 100, достаточно запятую перенести на два знака вправо, отъ чего множимое 2,127 увеличится въ 100 разъ:

$$2,127 \times 100 = 212,7.$$

Пусть множителемъ является какое-нибудь другое *цѣлое число*, кромѣ единицы съ нулями; посмотримъ, какъ тогда производится умноженіе. Напримѣръ: 4,15 умножить на 21.

Отбрасываемъ во множимомъ запятую, отъ чего множимое 4,15 обратится въ *цѣлое число* 415 и увеличится въ 100 разъ. Умножаемъ теперь 415 на 21 по правилу умноженія *цѣлыхъ чиселъ*:

$$\begin{array}{r} 415 \\ \times 21 \\ \hline 415 \\ 830 \\ \hline 8715 \end{array}$$

Но, увеличивъ одинъ изъ сомножителей въ 100 разъ, мы произведеніе увеличили тоже въ 100 разъ; поэтому произведеніе 8715 больше истиннаго въ 100 разъ. Чтобы получить истинное произведеніе, надо полученное произведеніе уменьшить въ 100 разъ. Каждое *цѣлое число* можно разсматривать, какъ десятичную дробь, у которой на мѣстѣ десятичныхъ знаковъ стоятъ нули. Поэтому число 8715 можно разсматривать, какъ дробь 8715,000... (съ безчисленнымъ множествомъ нулей), и чтобы уменьшить его въ 100 разъ, достаточно запятую въ немъ перенести на два знака *влѣво*.



Число 8715, уменьшенное въ 100 разъ, равно 87,15, т.-е.  $4,15 \times 21 = 87,15$ ; 87,15 и есть истинное произведеніе 4,15 на 21.

Итакъ, чтобы умножить десятичную дробь на цѣлое число, достаточно въ десятичной дроби отбросить запятую (или просто не обращать вниманія на нее) и перемножить сомножителей, какъ цѣлыя числа; въ полученномъ произведеніи отдѣляютъ запятой столько цифръ справа, сколько десятичныхъ знаковъ во множимомъ.

Случай 2. Пусть намъ дано умножить 27,36 на 2,8. Отбрасывая запятая въ множимомъ и въ множителѣ, отъ чего множимое 27,36 увеличится въ 100 разъ и обратится въ цѣлое число 2736, множитель 2,8 увеличится въ 10 разъ и обратится въ цѣлое число 28,—перемножаемъ затѣмъ 2736 и 28, какъ цѣлыя числа, и получимъ:

$$\begin{array}{r} 2736 \\ \times 28 \\ \hline 21888 \\ 5472 \\ \hline 76608 \end{array}$$

Но, умноживъ множимое на 100, а множитель на 10, мы тѣмъ самымъ увеличили истинное произведеніе въ тысячу разъ; поэтому полученное произведеніе больше истиннаго въ 1000 разъ. Чтобы получить истинное произведеніе дробей 27,36 и 2,8, надо полученное произведеніе уменьшить въ 1000 разъ, т.-е. перенести въ немъ запятую на 3 знака влѣво.

Число 76608, уменьшенное въ 1000 разъ, равно 76,608, т.-е.  $27,36 \times 2,8 = 76,608$ .

Отсюда приходимъ къ заключенію, что для того, чтобы умножить десятичную дробь на десятичную, достаточно отбросить въ обоихъ сомножителяхъ запятая и перемножить ихъ, какъ цѣлыя числа; въ полученномъ произведеніи слѣдуетъ отдѣлить запятой столько цифръ справа, сколько десятичныхъ знаковъ во множимомъ и множителѣ вмѣстѣ.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Отвѣты:

- 1)  $1,5 \times 15$ .
- 2)  $0,4 \times 12,625$ .
- 3)  $0,32 \times 15,35$ .
- 4)  $3,875 \times 4,8$ .

- 1) 22,5.
- 2) 5,05.
- 3) 4,912.
- 4) 18,6.

### Дѣленіе десятичныхъ дробей.

При дѣленіи десятичныхъ дробей могутъ также представиться два случая: 1) когда дѣлителемъ является цѣлое число и 2) когда дѣлителемъ является дробь.

Случай 1. Когда дѣлителемъ служить 10, 100, 1000 или вообще единица съ нулями, то для дѣленія десятичной дроби на него достаточно въ ней перенести запятую на одинъ, два, три и т. д. знака влѣво. Напримѣръ:

$$0,25 : 10 = 0,025.$$

Пусть теперь намъ дано раздѣлить 25,432 на 8.



$$\begin{array}{r}
 25,432 \overline{) 8} \\
 \underline{24} \phantom{00} \\
 14 \phantom{00} \\
 \underline{8} \phantom{00} \\
 63 \phantom{00} \\
 \underline{56} \phantom{00} \\
 72 \phantom{00} \\
 \underline{72} \phantom{00} \\
 0
 \end{array}$$

тысячныя. сносимъ 2 тысячныхъ и дѣлимъ на 8: въ частномъ получилось 9 тысячныхъ.

$$\begin{array}{r}
 23,4 \overline{) 16} \\
 \underline{16} \phantom{00} \\
 74 \phantom{00} \\
 \underline{64} \phantom{00} \\
 100 \phantom{00} \\
 \underline{96} \phantom{00} \\
 40 \phantom{00} \\
 \underline{32} \phantom{00} \\
 80 \phantom{00} \\
 \underline{80} \phantom{00} \\
 0
 \end{array}$$

Дѣлимъ сначала 25 цѣлыхъ на 8: въ частномъ получится 3, а въ остаткѣ 1; 1 цѣлая на 8 не дѣлится, и въ частномъ цѣлыхъ единицъ больше не получится, а потому ставимъ послѣ 3 запятую. Раздробляемъ затѣмъ 1 въ десятыя доли: ихъ будетъ 10; прибавивъ сюда 4 десятыхъ и раздѣливъ на 8, получимъ въ частномъ 1 десятую и въ остаткѣ 6 десятыхъ. Раздробивъ эти 6 десятыхъ въ сотыя и снесши 3 сотыхъ, получимъ 63 сотыхъ; дѣлимъ 63 на 8: въ частномъ получимъ 7 сотыхъ и въ остаткѣ 7 сотыхъ. Раздробляемъ ихъ въ

Разсмотримъ еще одинъ примѣръ: пусть намъ надо раздѣлить 23,4 на 16. Дѣлимъ 23 цѣлыхъ на 16: въ частномъ получится 1 цѣлая, а въ остаткѣ 7. Раздробивъ 7 цѣлыхъ въ десятыя доли, получаемъ 70; прибавивъ къ нимъ 4 десятыхъ доли, получимъ всего 74. Дѣлимъ 74 на 16; получимъ въ частномъ 4 *десятыхъ*, а въ остаткѣ 10. Раздробивъ 10 десятыхъ въ сотыя доли, получимъ 100 сотыхъ. Въ дѣлимомъ сотыхъ долей нѣтъ. Дѣлимъ 100 на 16 и т. д. Результатъ—1,4625.

*Случай 2.* Пусть дано раздѣлить 3,825 на 1,02.

$$\begin{array}{r}
 382,5 \overline{) 102} \\
 \underline{306} \phantom{00} \\
 765 \phantom{00} \\
 \underline{714} \phantom{00} \\
 510 \phantom{00} \\
 \underline{510} \phantom{00} \\
 0
 \end{array}$$

получится 3 цѣлыхъ, а въ остаткѣ 76. Раздробивъ эти 76 цѣлыхъ въ десятыя и снесши 5 десятыхъ, получимъ 765 десятыхъ. Дѣлимъ ихъ на 102: въ частномъ получится 7 *десятыхъ*, а въ остаткѣ 51 десятая. Раздробляемъ остатокъ въ сотыя и снова дѣлимъ на 102: въ частномъ получится 5 сотыхъ, а въ остаткѣ 0.

Итакъ, чтобы раздѣлить десятичную дробь на десятичную, слѣдуетъ въ дѣлитель отбросить запятую, а въ дѣлимомъ перенести запятую вправо на столько цифръ, сколько десятичныхъ знаковъ въ дѣлитель; затѣмъ производить дѣленіе такъ, какъ на цѣлое число

### УПРАЖНЕНІЯ.

Отвѣты

- 1) 12,4 : 4.
- 2) 2,55 : 1,5.
- 3) 6,3 : 0,18.

- 1) 3,1.
- 2) 1,7.
- 3) 35.



## ГЛАВА 3-ья.

## § 39. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

Всякая десятичная дробь, какъ мы уже видѣли, есть такая же дробь, какъ и любая обыкновенная. Разница между дробью десятичной и обыкновенной заключается лишь въ ихъ изображеніи. Поэтому всякая десятичная дробь можетъ быть обращена въ обыкновенную: для этого надо ее лишь изобразить не въ видѣ цѣлаго числа, а въ видѣ числителя, раздѣленнаго на знаменателя. Дробь 0,31, напримѣръ, означаетъ *нуль цѣлыхъ и тридцать одну сотую*, но тридцать одну сотую можно написать такъ:  $\frac{31}{100}$ . Такимъ образомъ, десятичная дробь 0,31 равна обыкновенной  $\frac{31}{100}$ : *сама десятичная дробь (безъ запятой) становится при этомъ числителемъ, а знаменателемъ является единица со столькоими нулями, сколько въ десятичной дроби десятичныхъ знаковъ*.

Возьмемъ еще десятичную дробь 3,5; она означаетъ *три цѣлыхъ и пять десятыхъ* и обращается въ смѣшанное число  $3\frac{5}{10}$ . Сокративъ 5 и 10, получимъ:  $3\frac{1}{2}$ . Десятичная дробь 3,5, значить, обратилась въ смѣшанное число  $3\frac{1}{2}$ .

Но такъ какъ дѣйствія надъ десятичными дробями производить легче, чѣмъ надъ обыкновенными, то гораздо чаще приходится обыкновенныя дроби обращать въ десятичныя. Посмотримъ, какъ дѣлается такое обращеніе.

Вполнѣ понятно, что, обращая обыкновенную дробь въ десятичную, мы не измѣняемъ ея величины, а придаемъ ей лишь иной видъ, болѣе удобный для вычисленій. Вполнѣ также понятно и то, что безъ особенной трудности въ десятичныя обращаются такія обыкновенныя дроби, у которыхъ знаменателемъ служить единица съ нулями. Дробь  $\frac{51}{100}$ , напримѣръ, можетъ быть обращена въ десятичную 0,51; дробь  $\frac{51}{1000}$  — въ десятичную 0,051; смѣшанное число  $4\frac{13}{100}$  обращается въ 4,13.

Словомъ, чтобы обратить въ десятичную такую обыкновенную дробь, у которой знаменателемъ служить 1 съ нулями, поступаютъ такъ: *пишутъ числителя и справа налѣво въ немъ отсчитываютъ столько цифръ, сколько нулей въ знаменателѣ; здѣсь ставится запятая, а налѣво отъ запятой будутъ цѣлыя единицы, если онѣ имѣются, или пишутъ нуль, если ихъ нѣтъ*. Когда въ числитель меньше цифръ, нежели нулей въ знаменателѣ, то къ числителю слѣва приписываются нули.

Изъ этого, стало быть, видно, что любую обыкновенную дробь можно обратить въ десятичную только тогда, когда ея знаменатель можетъ быть какимъ-нибудь способомъ обращенъ въ единицу съ нулями.

Возьмемъ, напримѣръ, дробь  $\frac{3}{25}$ . Умножимъ оба члена ея на 4 (отъ такого умноженія, мы знаемъ, величина дроби не измѣнится):

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100}.$$

Дробь  $\frac{3}{25}$  равна дроби  $\frac{12}{100}$ , которая обращается въ десятичную: 0,12. Итакъ, обыкновенная дробь  $\frac{3}{25}$  равна десятичной 0,12.



Возьмемъ еще дробь  $\frac{5}{8}$ . Чтобы обратить знаменателя 8 въ единицу съ нулями, надо умножить его на 125, ибо  $8 \times 125 = 1000$ . Умноживъ теперь оба члена дроби  $\frac{5}{8}$  на 125, получимъ:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000}.$$

Обыкновенная же дробь  $\frac{625}{1000}$  можетъ быть обращена въ десятичную: 0,625. Итакъ, обыкновенная дробь  $\frac{5}{8}$  равна десятичной 0,625.

Если бь, напимѣрь, взять дробь  $\frac{5}{7}$ , то, на какое бы число ни умножить знаменателя 7, онъ никогда не обратится въ единицу съ нулями, и, слѣдовательно, дробь  $\frac{5}{7}$  не можетъ обратиться въ десятичную.

Изъ дроби  $\frac{3}{25}$  мы образовали дробь  $\frac{12}{100}$ , умноживъ знаменателя 25 на 4, т.-е.:

$$100 = 25 \cdot 4 = (5 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2) = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2.$$

Изъ дроби  $\frac{5}{8}$  получилась дробь  $\frac{625}{1000}$  посредствомъ умноженія знаменателя 8 на 125, т.-е.:

$$1000 = 8 \cdot 125 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Разлагая на простыхъ множителей другія числа, составленныя изъ единицы съ нулями, мы замѣчаемъ, что всѣ они, наподобіе 100 и 1000, состоятъ изъ множителей 2 и 5, взятыхъ въ одинаковомъ количествѣ: 10 состоитъ изъ одной двойки и одной пятерки, 100—изъ двухъ двоекъ и двухъ пятерокъ, 1000—изъ трехъ двоекъ и трехъ пятерокъ и т. д.

Отсюда мы приходимъ къ заключенію, что *въ единицы съ нулями могутъ обращаться только такія числа, въ которыя, въ качествѣ множителей, входятъ либо только двойки, либо только пятерки, либо тѣ и другія*. Когда число состоитъ изъ *нѣсколькихъ двоекъ*, то для того, чтобы обратить его въ единицу съ нулями, надо умножить его на *столько же пятерокъ*; напимѣрь:  $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ , и если умножить 16 на  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ , т.-е. на 625, получится 10000 ( $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ )—единица съ нулями. Когда число состоитъ изъ *нѣсколькихъ пятерокъ*, его надо умножить на *столько же двоекъ*; напимѣрь:  $25 = 5 \cdot 5$ , и если умножить 25 на  $2 \cdot 2$ , т.-е. на 4, получится 100 ( $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ ). Когда въ числѣ имѣются и двойки и пятерки, но не въ одинаковомъ количествѣ, тогда это число надо умножить на *того изъ множителей, который входитъ въ него меньшее число разъ*, при чемъ множитель этотъ берутъ столько разъ, на сколько разъ онъ входитъ въ число меньше другого. Такъ, чтобы обратить въ единицу съ нулями число 40, состоящее изъ  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ , надо его умножить на двѣ пятерки, т.-е. на 25, отъ чего оно обратится въ  $40 \times 25 = 1000$ .

Когда въ числѣ, *кромѣ двухъ и пяти, содержится еще какой-нибудь другой множитель*, то такое число не обращается въ единицу съ нулями.

Все сказанное даетъ намъ возможность сразу же опредѣлить, обратится ли данная обыкновенная дробь въ десятичную или нѣтъ: *если знаменатель ея содержитъ множители 2 или 5 и никакихъ другихъ множителей, кромѣ этихъ, то дробь обратится въ десятичную; въ противномъ случаѣ она въ десятичную не обратится*. Напр.:  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{4}{25}$ ,  $\frac{3}{16}$  обращаются въ десятичныя дроби, а  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{5}{12}$ ,  $\frac{3}{33}$  не обращаются въ десятичныя дроби.



При этомъ необходимо замѣтить слѣдующее: если данная обыкновенная дробь обращается въ десятичную, то по знаменателю легко сразу сказать, сколько десятичныхъ знаковъ будетъ имѣть равная ей десятичная дробь. Дѣйствительно, десятичная дробь, которая получится отъ обращенія обыкновенной дроби  $\frac{3}{40}$ , будетъ имѣть 3 десятичныхъ знака, ибо отъ умноженія числителя и знаменателя на 25 получится дробь  $\frac{3 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{75}{1000}$ , знаменатель которой имѣетъ 3 нуля. Почему это такъ? 1000 состоитъ изъ трехъ двоекъ и трехъ пятерокъ, а 40—изъ трехъ двоекъ и одной пятерки; для того, чтобы 40 обратилось въ 1000, его надо умножить на 5 · 5, т. е. надо въ немъ уравнивать число двоекъ и пятерокъ. Посмотрѣвъ на знаменателя 40 и увидѣвъ, что въ составъ его множителей входятъ три двойки и одна пятерка, мы такимъ образомъ сразу же могли опредѣлить, что десятичная дробь, которая получится отъ обращенія обыкновенной дроби  $\frac{3}{40}$ , будетъ имѣть 3 десятичныхъ знака. Вообще, десятичная дробь, получающаяся изъ обыкновенной, имѣетъ столько десятичныхъ знаковъ, сколько разъ въ ея знаменателѣ содержится тотъ изъ множителей 2 и 5, который входитъ въ него большее число разъ. Напр.: въ дроби  $\frac{3}{40}$  знаменатель 40 состоитъ изъ трехъ двоекъ и одной пятерки; слѣдовательно, десятичная дробь будетъ имѣть 3 десятичныхъ знака:  $\frac{3}{40} = \frac{75}{1000} = 0,075$ .

Разсмотрѣнный способъ обращенія обыкновенныхъ дробей въ десятичные въ сущности сводится къ разложенію знаменателя на простые множители. Тѣ дроби, знаменатели которыхъ не содержатъ множителей 2 и 5 или имѣютъ кромѣ нихъ какіе-нибудь другіе множители, въ десятичные дроби обращены быть не могутъ.

Есть, однако, другой способъ обращенія обыкновенныхъ дробей въ десятичные, которымъ всякая обыкновенная дробь можетъ быть обращена въ десятичную. Способъ этотъ заключается въ дѣленіи числителя обращаемой дроби на ея знаменателя. Всякая обыкновенная дробь можетъ быть разсматриваема, какъ простое обозначеніе дѣленія одного числа на другое. Такъ, дробь  $\frac{3}{40}$  обозначаетъ дѣленіе 3 на 40. Цѣлымъ числомъ результатъ этого дѣленія выражень быть не можетъ, а потому онъ выражается дробью  $\frac{3}{40}$ . Но, зная, какъ производится дѣленіе десятичныхъ дробей, мы этотъ результатъ можемъ выразить десятичной дробью. Дѣлается это такъ:

3	40
30	0,075
300	
280	
20	
200	
200	
0	

Дѣлимъ сначала 3 на 40 : въ частномъ получится 0 цѣлыхъ. Раздробляемъ тогда 3 цѣлыхъ въ десятыя доли; ихъ будетъ 30. Но 40 въ 30 не содержится ни разу; слѣдовательно, десятыхъ въ частномъ будетъ 0. Раздробляемъ 30 десятыхъ въ сотыя; ихъ будетъ 300; въ частномъ получится 7 сотыхъ, а въ остаткѣ 20 сотыхъ. Раздробляемъ остатокъ въ тысячныя; ихъ будетъ 200; въ частномъ получится 5 тысячныхъ, а въ остаткѣ 0.

Итакъ, результатъ дѣленія 3 на 40 равенъ десятичной дроби 0,075. На этомъ же основаніи можно всякую обыкновенную дробь обращать въ десятичную; не всякая только обыкновенная дробь обратится въ конечную десятичную дробь.



$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 7} \\
 \underline{50} \phantom{00} 0,714285714... \\
 \phantom{50} 49 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} 10 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \underline{7} \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} 30 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \underline{28} \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} 20 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \underline{14} \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} 60 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \underline{56} \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} 40 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} \underline{35} \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} \phantom{35} 50 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} \phantom{35} \underline{49} \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} \phantom{35} \phantom{49} 10 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} \phantom{35} \phantom{49} \underline{7} \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} \phantom{35} \phantom{49} \phantom{7} 30 \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} \phantom{35} \phantom{49} \phantom{7} \underline{28} \phantom{00} \\
 \phantom{50} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} \phantom{14} \phantom{56} \phantom{35} \phantom{49} \phantom{7} \phantom{28} 2 \phantom{00}
 \end{array}$$

Возьмемъ, напримѣръ, дробь  $\frac{5}{7}$ . Дѣля по-степенно ея числителя на знаменателя, мы все будемъ получать разные остатки, изъ которыхъ ни одинъ не раздѣлится на 7, сколько бы мы ни продолжали это дѣленіе. Десятичная дробь, получающаяся отъ обращенія такой обыкновенной, называется **безконечной**. Частное отъ дѣленія 5 на 7, очевидно, не можетъ быть выражено въ десятичныхъ доляхъ точно, а только приближенно, съ точностью до какой угодно доли. Чѣмъ дальше мы будемъ дѣлить 5 на 7, тѣмъ частное будетъ все точнѣе: 0,714 будетъ частное съ точностью до одной тысячной; 0,7142 будетъ частное съ точностью до одной десяти тысячной, и т. д.

Итакъ, дробь  $\frac{5}{7}$  обращается не въ конечную десятичную дробь, а въ безконечную, которая точно выражена быть не можетъ. Продолжая дѣленіе 5 на 7, мы замѣтимъ, что, какъ остатки, такъ и цифры частнаго, начиная съ первой, станутъ вскорѣ повторяться въ томъ же самомъ порядкѣ (повторяющіеся остатки и цифры въ нашемъ примѣрѣ отмѣчены жирнымъ шрифтомъ; многоточіе показываетъ безконечность дроби и повтореніе цифръ).

## УПРАЖНЕНІЯ.

1. Обратитъ слѣдующія десятичныя дроби въ обыкновенныя: 0,25; 3,5; 21,75; 0,125; 3,625; 0,216; 10,012; 7,0064; 12,00125; 10,44.

*Рѣшенія.*  $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ;  $3,5 = 3\frac{5}{10} = 3\frac{1}{2}$ ;  $21,75 = 21\frac{75}{100} = 21\frac{3}{4}$ ;  $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$ ;  $3,625 = 3\frac{625}{1000} = 3\frac{5}{8}$ ;  $0,216 = \frac{216}{1000} = \frac{27}{125}$ ;  $10,012 = 10\frac{12}{1000} = 10\frac{3}{250}$ ;  $7,0064 = 7\frac{64}{10000} = 7\frac{4}{625}$ ;  $12,00125 = 12\frac{125}{10000} = 12\frac{1}{80}$ ;  $10,44 = 10\frac{44}{100} = 10\frac{11}{25}$ .

2. Обратитъ въ десятичныя дроби слѣдующія обыкновенныя способомъ разложенія знаменателей на простые множители:  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{21}{4}$ ;  $\frac{11}{30}$ ;  $\frac{4}{125}$ ;  $2\frac{7}{25}$  (при обращеніи смѣшаннаго числа обращается только его дробная часть, а цѣлое число прямо присоединяется къ полученной десятичной дроби).

*Рѣшенія.*  $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0,4$ ;  $\frac{21}{64} = \frac{21 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{328125}{1000000} = 0,328125$ ;  
 $\frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 5}{(2 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 5} = \frac{55}{100} = 0,55$ ;  $\frac{4}{125} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{(5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{32}{1000} = 0,032$ ;  $2\frac{7}{25} = 2\frac{7 \cdot 2 \cdot 2}{(5 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 2} = 2\frac{28}{100} = 2,28$ .

3. Обратитъ въ десятичныя дроби слѣдующія обыкновенныя способомъ дѣленія числителя на знаменателя (дѣленіе производитъ до тѣхъ поръ, пока цифры частнаго не начнутъ повторяться; въ знакъ начала повторенія цифръ ставьте многоточіе):  $\frac{1}{8}$ ;  $\frac{1}{25}$ ;  $\frac{1}{40}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{11}$ ;  $\frac{3}{14}$ ;  $\frac{25}{48}$ ;  $\frac{3}{220}$ .



Рѣшенія.

$$\begin{array}{r|l} 1) 1 & 8 \\ \hline -10 & 0,125 \\ \hline 8 & \\ -20 & \\ \hline 16 & \\ -40 & \\ \hline 40 & \\ -40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2) 1 & 25 \\ \hline -100 & 0,04 \\ \hline 100 & \\ -0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3) 1 & 40 \\ \hline -100 & 0,025 \\ \hline 80 & \\ -200 & \\ \hline 200 & \\ -0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4) 1 & 3 \\ \hline -10 & 0,33... \\ \hline 9 & \\ -10 & \\ \hline 9 & \\ -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5) 1 & 11 \\ \hline -10 & 0,0909... \\ \hline 10 & \\ -99 & \\ \hline 10 & \\ -100 & \\ \hline 99 & \\ -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6) 3 & 14 \\ \hline - & 0,214285714... \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7) 25 & 48 \\ \hline - & 0,520833... \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8) 3 & 220 \\ \hline - & 0,013636... \end{array}$$

## ГЛАВА 4-ая.

## § 40. Периодическія дроби.

Безконечныя десятичныя дроби, получаемыя отъ обращенія обыкновенныхъ, съ однимъ или нѣсколькими повторяющимися въ одномъ и томъ же порядкѣ десятичными знаками, называются **периодическими дробями**; группа повторяющихся десятичныхъ знаковъ называется **периодомъ**.

Дроби 0,333..., 0,52333..., 0,01363636... суть периодическія; въ первой дроби периодомъ является цифра 3, во второй—тоже 3, а въ третьей—36. Читаются периодическія дроби такъ: 0,333... читается: *нуль цѣлыхъ, три въ периодъ*; 0,52333... читается: *нуль цѣлыхъ, пятьдесятъ два до периода, три въ периодъ*. Въ первой дроби периодъ начинается тотчасъ же послѣ запятой,—такая дробь называется **чистой периодической**; во второй и третьей дробяхъ между запятой и периодомъ, т.-е. до начала периода, стоятъ другія цифры,—такія дроби называются **смѣшанными периодическими**.

Периодическія десятичныя дроби пишутся или такъ, какъ у насъ написано, т.-е. периодъ пишется одинъ или нѣсколько разъ, и послѣ него ставится многоточіе; или же периодъ пишется только одинъ разъ и при этомъ заключается въ скобки: 0,333... пишется 0,(3); 0,52333... пишется 0,52(3); 0,013636... пишется 0,01(36).

При рѣшеніи задачъ съ десятичными дробями слѣдуетъ всѣ встрѣчающіяся обыкновенныя дроби обращать въ десятичныя; всѣ же периодическія дроби слѣдуетъ обращать въ обыкновенныя.

## § 41. Обращеніе периодическихъ дробей въ обыкновенныя.

Обращеніе чистой  
периодической  
дроби.

Самой простой изъ периодическихъ дробей будетъ та, въ которой периодомъ является 1, т.-е. дробь 0,111... Если изслѣдовать происхожденіе этой периодической дроби, то тогда нетрудно будетъ уже узнать, отъ какой обыкновенной дроби происходитъ любая периодическая дробь.

Периодическая дробь 0,111... произошла отъ обыкновенной дроби  $\frac{1}{9}$ . На самомъ дѣлѣ, дѣля 1 на 9, мы получимъ чистую периодическую дробь 0,(1):



$$\left. \begin{array}{r|l} 1 & 9 \\ -10 & 0,111\dots \\ \hline 9 & \\ -10 & \\ \hline 9 & \\ -10 & \\ \hline 9 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \right\} \frac{1}{9} = 0,(1).$$

Посмотримъ теперь, въ какія періодическія дроби обращаются обыкновенныя дроби  $\frac{1}{99}$  и  $\frac{1}{999}$ :

$$\left. \begin{array}{r|l} 1 & 99 \\ -10 & 0,010101\dots \\ \hline 100 & \\ -99 & \\ \hline 10 & \\ -100 & \\ \hline 99 & \\ -10 & \\ \hline 100 & \\ -99 & \\ \hline 10 & \\ -100 & \\ \hline 99 & \\ -1 & \end{array} \right\} \frac{1}{99} = \text{чистой} \\ \text{периодиче-} \\ \text{ской дроби} \\ 0,(01).$$

$$\left. \begin{array}{r|l} 1 & 999 \\ -10 & 0,001001\dots \\ \hline 100 & \\ -1000 & \\ \hline 999 & \\ -10 & \\ \hline 100 & \\ -1000 & \\ \hline 999 & \\ -1 & \end{array} \right\} \frac{1}{999} = \text{чистой} \\ \text{периодиче-} \\ \text{ской дроби} \\ 0,(001).$$

Изучая всѣ другія обыкновенныя дроби, у которыхъ числитель 1, а знаменатель одна или нѣсколько девятокъ, мы замѣтимъ, что всѣ онѣ обращаются въ чистыя періодическія дроби, періодъ которыхъ состоитъ или изъ одной единицы или же изъ единицы, предшествоваемой нулями, причѣмъ въ періодъ всего столько цифръ, сколько девятокъ въ знаменателѣ.

Пусть теперь намъ дано обратить въ обыкновенную—чистую періодическую дробь  $0,(15)$ . Сравнимъ эту дробь съ болѣе простой періодической дробью, у которой въ періодѣ тоже 2 цифры, именно съ дробью  $0,(01)$ , т.-е. сравнимъ двѣ дроби  $0,151515\dots$   $0,010101\dots$  Дробь  $0,(01)$  произошла отъ обыкновенной дроби  $\frac{1}{99}$ . Но дробь  $0,(15)$  въ 15 разъ больше дроби  $0,(01)$ , ибо 15 сотыхъ въ 15 разъ больше 1 сотой; поэтому она должна была произойти отъ обыкновенной дроби, тоже въ 15 разъ большей, нежели дробь  $\frac{1}{99}$ , т.-е. отъ дроби  $\frac{1}{99} \times 15 = \frac{15}{99}$ .

Итакъ, періодическая дробь  $0,(15)$  обращается въ обыкновенную дробь  $\frac{15}{99}$ , или, по сокращеніи на 3, въ дробь  $\frac{5}{33}$ .

Такъ же точно чистая періодическая дробь  $3,(36)$  обращается въ обыкновенную  $\frac{36}{99}$ , ибо періодъ «36 сотыхъ» въ 36 разъ больше періода «01 сотая».

На основаніи этихъ примѣровъ можемъ вывести такое правило: чтобы обратить чистую періодическую дробь въ обыкновенную, надо періодъ сдѣлать числителемъ, а знаменатель будетъ состоять изъ столько-кихъ девятокъ, сколько цифръ въ періодѣ; полученную дробь, если можно, сокращаютъ.



### Обращеніе смѣшанной періодической дроби.

Обращеніе смѣшанной періодической дроби въ обыкновенную совершается нѣсколько иначе. Пусть требуется обратить въ обыкновенную — смѣшанную періодическую дробь  $0,2(37)$ . Переносимъ въ ней прежде всего запятую на одинъ знакъ вправо; тогда дробь  $0,2(37)$  увеличится въ 10 разъ и станетъ чистой періодической дробью  $2,(37)$ . А теперь поступаемъ по правилу обращенія чистой періодической дроби:

$$2,(37) = 2\frac{37}{99}.$$

Но эта дробь не есть та обыкновенная, отъ которой произошла дробь  $0,2(37)$ : она въ десять разъ больше той, ибо произошла отъ обращенія дроби  $2,(37)$ , въ 10 разъ большей данной. Чтобы получить ту обыкновенную дробь, отъ которой произошла наша данная дробь  $0,2(37)$ , надо  $2\frac{37}{99}$  уменьшить въ 10 разъ. Итакъ,

$$0,2(37) = 2\frac{37}{99} : 10 = \frac{2 \cdot 99 + 37}{99 \cdot 10} = \frac{235}{990}.$$

Внимательно присматриваясь къ обращенію этой смѣшанной періодической дроби въ обыкновенную, мы замѣтимъ, что числитель полученной обыкновенной дроби 235 получился бы также, если бы изъ числа, стоящаго до второго періода, т.-е. изъ 237 [дробь  $0,2(37)$  можно изобразить такъ:  $0,2373737\dots$ ; тогда ясно, что до второго періода, т.-е. до второго раза 37, расположены цифра 2 и группа 37, или число 237], вычестъ число, стоящее до перваго періода, т.-е. 2; знаменатель же 990 образовался такъ: взято столько девятокъ, сколько цифръ въ періодѣ, и столько нулей, на сколько знаковъ вправо перенесена была запятая, т.-е. сколько цифръ въ данной дроби между запятой и періодомъ.

На этомъ основаніи мы можемъ установить слѣдующее правило обращенія смѣшанной періодической дроби въ обыкновенную:

*чтобы обратить смѣшанную періодическую дробь въ обыкновенную, нужно изъ числа, стоящаго до второго періода, вычестъ число, стоящее до перваго періода, и полученную разность сдѣлать числителемъ; въ знаменатель же будетъ столько девятокъ, сколько цифръ въ періодѣ, со столькоми нулями, сколько цифръ до періода; полученную дробь сокращаютъ, если возможно.*

Дробь  $14,14545\dots$  обращается по этому правилу такъ:

$$14,1(45) = 14 \frac{145 - 14}{990} = 14 \frac{144}{990} = 14 \frac{8}{55}.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что знаменатель обыкновенной дроби, получаемой отъ обращенія чистой періодической, совершенно не содержитъ множителями 2 и 5, ибо онъ состоитъ только изъ девятокъ. Знаменатель же обыкновенной дроби, полученной отъ обращенія смѣшанной періодической, содержитъ въ числѣ прочихъ множителей также и множители 2 и 5, ибо, кромѣ девятокъ, онъ имѣетъ нули.

Отсюда мы приходимъ къ такому выводу: въ чистыя періодическія дроби обращаются только такія обыкновенныя, знаменатели которыхъ не содержатъ ни множителя 2, ни множителя 5; въ смѣшанныя періодическія обращаются только такія обыкновенныя дроби, знаменатели которыхъ, на ряду съ другими множителями, содержатъ множители 2 и 5.



## УПРАЖНЕНИЯ.

Рѣшенія:

Обратить въ обыкновенныя дроби слѣдующія періодическія: 0,(5); 0,(324); 8,(18); 0,1(2); 0,0(3); 0,00(8); 0,111(3); 0,02(4); 5,01(9).

$$\begin{aligned} 0,(5) &= \frac{5}{9}; & 0,(324) &= \frac{324}{999} = \frac{12}{37}; & 8,(18) &= \\ &= 8\frac{18}{99} = 8\frac{2}{11}; & 0,1(2) &= \frac{12-1}{90} = \frac{11}{90}; & 0,0(3) &= \\ &= \frac{3}{90} = \frac{1}{30}; & 0,00(8) &= \frac{8}{900} = \frac{2}{225}; & 0,111(3) &= \\ &= \frac{1113-111}{9000} = \frac{1002}{9000} = \frac{167}{1500}; & 0,02(4) &= \frac{24-2}{900} = \\ &= \frac{22}{900} = \frac{11}{450}; & 5,01(9) &= 5\frac{13-1}{900} = 5\frac{12}{900} = 5\frac{1}{75}. \end{aligned}$$

## Повторительные вопросы и ответы.

- 1) Что называется десятичной дробью?—Дробь, у которой знаменатель 1 съ нулями.
- 2) Что сдѣлается съ десятичной дробью, если запятую перенести направо, влево, отбросить?—Увеличится, уменьшится, увеличится.
- 3) Какъ обратить обыкновенную дробь въ десятичную?—Дѣленіемъ числителя на знаменателя.
- 4) Какія бываютъ десятичныя дроби?—Конечныя и безконечныя.
- 5) Когда дроби получаются конечныя?—Когда знаменатель состоитъ изъ двоекъ или пятерокъ, или тѣхъ и другихъ.
- 6) Что называется періодической дробью?—Безконечная десятичная дробь, въ которой одинъ или нѣсколько десятичныхъ знаковъ повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ.
- 7) Какія бываютъ періодическія дроби?—Чистыя и смѣшанныя.
- 8) Что называется чистой періодической дробью?—Безконечная дробь, у которой періодъ начинается непосредственно послѣ запятой.
- 9) Когда обыкновенная дробь обращается въ чистую періодическую?—Когда въ составъ знаменателя не входятъ множителями двойки и пятерки.
- 10) Чему равны дроби:  $\frac{1}{99}$ ;  $\frac{1}{999}$ ?—Отв.:  $\frac{1}{99}=0,(1)$ ;  $\frac{1}{999}=0,(01)$ ;  $\frac{1}{9999}=0,(001)$ .
- 11) Какъ обращается чистая періодическая дробь въ обыкновенную?—Подъ періодомъ подписывается столько девятокъ, сколько цифръ въ періодѣ.
- 12) Когда получается смѣшанная періодическая дробь?—Если въ составъ знаменателя обыкновенной дроби входятъ множителями, на ряду съ двойками и пятерками, еще и другія простые числа.
- 13) Какъ обращается смѣшанная періодическая дробь въ обыкновенную?—Числителемъ дроби будетъ разность между числомъ, стоящимъ до второго періода и числомъ, стоящимъ до перваго періода, а знаменателемъ дроби будетъ число, имѣющее столько девятокъ, сколько цифръ въ періодѣ, и столько нулей, сколько цифръ до періода.



ОТДѢЛЪ VI.  
ТЕОРІЯ ПРОПОРЦІЙ

ГЛАВА I-ая.  
ОТНОШЕНІЯ.

§ 42. Ариѳметическія и геометрическія отношенія.

Въ ариѳметикѣ всевозможныя величины, какъ намъ уже извѣстно, выражаются числами, и такъ какъ величины бываютъ бѣльшія и меншія, то и числа, ихъ выражающія, могутъ быть больше и меньше. Сравнивая разныя величины между собой, мы можемъ замѣтить, что однѣ изъ нихъ бываютъ больше и меньше другихъ или *на сколько-нибудь* или же *въ нѣсколько разъ*; также и ариѳметика учитъ насъ тому, что одни числа больше и меньше другихъ или *на нѣкоторое число единицъ*, или же *въ нѣкоторое число разъ*. Такъ, положимъ, что высота какого-нибудь дерева равна 16-ти саженьямъ, а высота дома—4-мъ саженьямъ: высота дерева, скажемъ мы, больше высоты дома и высота дома меньше высоты дерева или *на 12 сажень*, или *въ 4 раза*. Сравнивая высоту дома съ высотой дерева, мы этимъ самымъ узнаемъ, въ какомъ *отношеніи* находятся эти величины одна къ другой. Отношеніе это мы выражаемъ двоякимъ образомъ посредствомъ чиселъ 16 и 4: разность этихъ чиселъ показываетъ намъ, *на сколько* одна изъ взятыхъ нами величинъ больше другой, и *на сколько* вторая меньше первой,—эту **разность** мы будемъ называть **разностнымъ отношеніемъ** двухъ данныхъ величинъ; частное же этихъ чиселъ показываетъ, *во сколько разъ* первая величина больше второй и вторая меньше первой,—это **частное** мы будемъ называть **кратнымъ отношеніемъ** двухъ данныхъ величинъ. Напримѣръ, 3 есть разностное отношеніе 15-ти и 12-ти, 24 и 21, и т. д.; въ то же время 3 есть кратное отношеніе 15-ти и 5-ти, 18 и 6, 24 и 8 и т. д.

Итакъ, чтобы выразить отношеніе между величинами, достаточно выразить отношеніе между обозначающими ихъ числами; разностное отношеніе показываетъ, на сколько одна величина больше другой, кратное же отношеніе показываетъ, во сколько разъ одна величина больше другой. Первое получается посредствомъ вычитанія одного числа изъ другого, а второе—дѣленіемъ одного на другое. Разностное отношеніе 16 саж. и 4 саж. выражается такъ:  $16 - 4 = 12$ ; кратное отношеніе 16 саж. и 4 саж. выражается такъ:  $16 : 4 = 4$ , или въ такомъ видѣ:  $\frac{16}{4} = 4$ . Въ этомъ случаѣ 16 и 4 называются *членами* отношенія, при чемъ 16 называется *предыдущимъ* чле-





номъ, а 4—*послѣдующимъ*; 12 есть *разность* отношенія, а 4 (частное) называется *знаменателемъ* кратнаго отношенія. Разностное отношеніе еще иначе называется **ариѳметическимъ**, а кратное—**геометрическимъ**.

На основаніи всего этого мы можемъ установить, что:

*ариѳметическимъ отношеніемъ двухъ чиселъ является третье число, показывающее, на сколько одно изъ этихъ чиселъ больше другого или другое меньше перваго;*

*геометрическимъ отношеніемъ двухъ чиселъ является третье число, показывающее, во сколько разъ одно изъ нихъ больше другого или другое меньше перваго.*

## УПРАЖНЕНІЯ.

ОТВѢТЫ:

1) Написать ариѳметическія отношенія между числами: 48 и 36; 0,54 и 0,49;  $65\frac{1}{2}$  и  $13\frac{1}{2}$ ; 5,72 и 1,6;  $\frac{7}{8}$  и  $\frac{4}{5}$ .

2) Написать три ариѳметическихъ отношенія съ разностью, равной 6-ти;  $1\frac{1}{2}$ ; 1; 7,111;  $\frac{1}{5}$ .

3) Написать геометрическія отношенія между числами: 33 и 11;  $66\frac{1}{2}$  и  $9\frac{1}{2}$ ; 0,125 и 0,5; 30,44 и 15,22;  $\frac{3}{4}$  и  $\frac{1}{16}$ .

4) Написать три геометрическихъ отношенія съ знаменателемъ, равнымъ 5-ти;  $2\frac{1}{2}$ ; 0,9;  $\frac{1}{4}$ .

1)  $48 - 36 = 12$ ;  $0,54 - 0,49 = 0,05$ ;  $65\frac{1}{2} - 13\frac{1}{2} = 52\frac{1}{2}$ ;  $5,72 - 1,6 = 4,12$ ;  $\frac{7}{8} - \frac{4}{5} = \frac{17}{40}$ .

2)  $14 - 8, 22 - 16, 36 - 30; 6\frac{1}{2} - 5, 9\frac{3}{4} - 8\frac{1}{4}, 12 - 10\frac{1}{2}; 15 - 14, 62\frac{1}{2} - 61\frac{1}{2}, 5,6 - 4,6; 10,111 - 3, 16,367 - 9,256, 49,461 - 42,35; 6\frac{1}{2} - 6, \frac{33}{11} - \frac{7}{11}, 4\frac{5}{11} - 4\frac{1}{11}$ .

3)  $33 : 11 = 3; 66\frac{1}{2} : 9\frac{1}{2} = 7; 0,125 : 0,5 = 0,25; 30,44 : 15,22 = 2; \frac{3}{4} : \frac{1}{16} = 12$ .

4)  $35 : 7, 0,5 : 0,1, 13 : 2\frac{3}{4}, 7 : 3, 22\frac{1}{2} : 9\frac{3}{4}, \frac{7}{8} : \frac{1}{8}; 0,72 : 0,8, 154 : 60, 108 : 120; 6 : 24, 10\frac{3}{4} : 42\frac{3}{4}, \frac{1}{18} : \frac{2}{9}$ .

## Зависимость между членами ариѳметическаго отношенія.

Весьма нетрудно понять, что члены разностнаго отношенія находятся между собой въ такой же зависимости, какъ и уменьшаемое и вычитаемое, т.-е.:

а) предыдущій членъ разностнаго отношенія (уменьшаемое) равняется послѣдующему (вычитаемому), сложенному съ разностью ( $12 - 5 = 7$ , отсюда  $12 = 5 + 7$ );

б) послѣдующій (вычитаемое) равняется предыдущему (уменьшаемому) безъ разности ( $12 - 5 = 7$ , отсюда  $5 = 12 - 7$ );

в) если предыдущій членъ (уменьшаемое) увеличится или уменьшится на какое-нибудь число, то на это же число увеличится и уменьшится разность отношенія;

г) если послѣдующій (вычитаемое) увеличится или уменьшится на какое-нибудь число, то на это же число уменьшится и увеличится разность отношенія;

е) если оба члена (уменьшаемое и вычитаемое) одновременно увеличатся или уменьшатся на какое-нибудь число, то разность отношенія останется безъ измѣненія.

Зная зависимость между членами отношенія, мы можемъ опредѣлять ихъ въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ нихъ неизвѣстенъ. Пусть, напримѣръ, разностное отношеніе какого-нибудь числа къ 18-ти есть 9: намъ, очевидно, нужно опредѣлить предыдущій членъ по даннымъ послѣдующему и разности. Записываемъ это отношеніе такъ:



$x - 18 = 9$  (латинская буква *икс* обозначает неизвѣстный членъ),  
Такъ какъ предыдущій равенъ послѣдующему, сложенному съ разностью,  
то  $x = 18 + 9$ , т.-е. 27.

### УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Каковъ будетъ предыдущій членъ разностнаго отношенія, если послѣдующій равенъ 31 и разность равна 8? Каковъ будетъ послѣдующій членъ разностнаго отношенія, если предыдущій—19,1 и разность 0,5?

2) Разность отношенія двухъ чиселъ 11. Предыдущій членъ увеличенъ на 0,13, а послѣдующій уменьшенъ на 2. Какова ихъ новая разность?

3) Послѣдующій членъ уменьшенъ на  $3\frac{1}{2}$ . Что нужно сдѣлать съ предыдущимъ, чтобы разность увеличилась на 8? чтобы разность уменьшилась на 18? чтобы она осталась безъ перемѣны?

1)  $x = 31 + 8 = 39$ ;  $x = 19,1 - 0,5 = 18,6$ .

2)  $11 + (0,13 + 2) = 13,13$ .

3) Увеличить на  $4\frac{1}{2}$ ; уменьшить на  $21\frac{1}{2}$ ; уменьшить на  $3\frac{1}{2}$ .

### Зависимость между членами геометрическаго отношенія.

*Члены кратнаго отношенія зависятъ другъ отъ друга такъ же, какъ дѣлимое и дѣлитель, т.-е.:*

а) предыдущій членъ кратнаго отношенія (дѣлимое) равенъ послѣдующему (дѣлителю), умноженному на знаменателя отношенія (частное) ( $18 : 6 = 3$ , отсюда  $18 = 6 \times 3$ );

б) послѣдующій членъ (дѣлитель) равенъ предыдущему (дѣлимому), раздѣленному на знаменателя отношенія (частное) ( $18 : 6 = 3$ , отсюда  $6 = 18 : 3$ );

с) если предыдущій членъ (дѣлимое) увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ, то знаменатель отношенія (частное) увеличится и уменьшится во столько же разъ;

д) если послѣдующій членъ (дѣлитель) увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ, то знаменатель отношенія (частное) уменьшится и увеличится во столько же разъ;

е) если оба члена отношенія (дѣлимое и дѣлитель) одновременно увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ, то знаменатель отношенія (частное) останется безъ измѣненія.

Пользуясь этой зависимостью, мы можемъ опредѣлять неизвѣстные члены отношенія. Такъ, въ отношеніи:

$$x : 15 = 7$$

неизвѣстный предыдущій равенъ  $15 \times 7 = 105$ , ибо предыдущій равенъ послѣдующему, умноженному на знаменателя.

На основаніи того, что отъ уменьшенія обоихъ членовъ кратнаго отношенія въ одинаковое число разъ знаменатель отношенія остается безъ перемѣны, мы имѣемъ возможность отношенія *сокращать*. Такъ, отношеніе чиселъ 96 и 36 равно отношенію чиселъ 32 и 12 и отношенію чиселъ 8 и 3 :

$$96 : 36 = 32 : 12 = 8 : 3.$$



Второе отношеніе получилось отъ раздѣленія членовъ перваго отношенія на 3; третье — отъ раздѣленія членовъ втораго отношенія на 4.

Пользуясь тѣмъ, что и отъ увеличенія обоихъ членовъ отношенія въ одинаковое число разъ знаменатель отношенія остается безъ перемѣны, мы можемъ *отношенія дробныхъ чиселъ замѣнять отношеніями цѣлыхъ и*, вообще, уничтожать дробные члены отношеній. Пусть намъ даны отношенія:

$$3\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{8}{11} : 8 = \frac{1}{11}.$$

Обратимъ оба члена перваго отношенія въ неправильныя дроби и приведемъ ихъ къ одному знаменателю:

$$3\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{7}{2} : \frac{7}{4} = \frac{14}{4} : \frac{7}{4}.$$

Отбросивъ теперь общаго знаменателя, мы каждый изъ членовъ этого отношенія увеличимъ въ 4 раза, отъ чего знаменатель отношенія не измѣнится, т.-е.:

$$3\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{7}{2} : \frac{7}{4} = \frac{14}{4} : \frac{7}{4} = 14 : 7 = 2.$$

Такъ же и во второмъ изъ данныхъ отношеній: отбросивъ въ предыдущемъ членѣ знаменателя 11 и умноживъ послѣдующій членъ на 11, мы оба члена такимъ образомъ увеличимъ въ 11 разъ и получимъ отношеніе цѣлыхъ чиселъ съ тѣмъ же знаменателемъ отношенія, т.-е.:

$$\frac{8}{11} : 8 = 8 : 88 = \frac{1}{11}.$$

## УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Найти значенія *икса* въ слѣдующихъ отношеніяхъ:

a)  $x : 14 = 70$ ; b)  $19\frac{1}{12} : x = \frac{1}{12}$ .

2) Сократить слѣдующія отношенія:  $40 : 10 = 4$ ;  $72 : 24 = 3$ ;  $105 : 45 = 2\frac{1}{3}$ ;  $234 : 26 = 9$ ;  $360 : 108 = 3\frac{1}{3}$ .

3) Замѣнить въ слѣдующихъ отношеніяхъ дробные члены цѣлыми:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{16} : \frac{11}{16} : \frac{22}{32} = \frac{11}{16}; \quad \frac{35}{12} : \frac{15}{12} = \frac{7}{2}; \quad 10\frac{15}{16} : 12 = \frac{115}{16}; \quad 25 : 6\frac{1}{4} = 4.$$

4) Знаменателемъ отношеній какихъ паръ цѣлыхъ чиселъ являются дроби:  $\frac{11}{12}$ ,  $\frac{45}{52}$ ,  $\frac{71}{81}$ ,  $\frac{16}{27}$ ,  $\frac{75}{88}$ ?

5) Привести къ простѣйшему виду слѣдующія отношенія:

$$\frac{28}{48} : \frac{87}{96}; \quad \frac{15}{54} : \frac{45}{72}; \quad \frac{9}{13} : \frac{11}{52}; \quad \frac{20}{63} : \frac{4}{7}; \quad \frac{25}{31} : \frac{5}{9}.$$

1) a) Такъ какъ предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на знаменателя отношенія, то  $x = 14 \times 70 = 980$ ; b) такъ какъ послѣдующій членъ равенъ предыдущему, дѣленному на знаменателя отношенія, то  $x = \frac{229}{12} : \frac{1}{12} = 229$ .

2)  $4 : 1 = 4$ ;  $36 : 12 = 3$ ;  $7 : 3 = 2\frac{1}{3}$ ;  $18 : 2 = 9$ ;  $10 : 3 = 3\frac{1}{3}$ .

3)  $9 : 10$ ;  $77 : 132$ ;  $36 : 90$ ;  $175 : 192$ ;  $100 : 25$ .

4) Такъ какъ всякая дробь есть частное отъ дѣленія ея числителя на знаменателя, то дробь  $\frac{11}{12}$  есть знаменатель отношенія 11-ти къ 12-ти;  $\frac{45}{52}$  есть знаменатель отношенія 45 къ 52;  $\frac{71}{81}$  къ 81;  $\frac{16}{27}$  къ 27;  $\frac{75}{88}$  къ 78.

5) Привести отношенія эти къ простѣйшему виду значитъ уничтожить въ нихъ дробные члены и затѣмъ сократить ихъ:  $\frac{28}{48} : \frac{87}{96} = 58 : 87 = 2 : 3$ ;  $\frac{15}{54} : \frac{45}{72} = 4 : 9$ ;  $\frac{9}{13} : \frac{11}{52} = 36 : 11$ ;  $\frac{20}{63} : \frac{4}{7} = 5 : 9$ ;  $\frac{25}{31} : \frac{5}{9} = 5 : 9$ .



## ГЛАВА 2-ая.

### ПРОПОРЦИИ.

#### § 43. Арифметическія и геометрическія пропорціи.

Если отношеніе двухъ какихъ-либо величинъ равно отношенію двухъ другихъ величинъ, то эти четыре величины, говорятъ, *пропорціональны*, и изъ нихъ можно составить такъ называемую **пропорцію**. Разумѣется, что и числа, выражающія эти величины, также пропорціональны.

Разностное отношеніе 12-ти къ 8-ми равно разностному отношенію 18-ти къ 14-ти; кратное отношеніе 24-хъ къ 6-ти равно кратному отношенію 20-ти къ 5-ти. Что отношеніе двухъ чиселъ равно отношенію двухъ другихъ, показываютъ на письмѣ такъ:

$$12 - 8 = 18 - 14, \text{ и } 24 : 6 = 20 : 5 \text{ или } \frac{24}{6} = \frac{20}{5}.$$

Читаются эти выраженія слѣдующимъ образомъ: *12 относится къ 8-ми такъ, какъ 18 къ 14-ти; 24 относится къ 6-ти такъ, какъ 20 къ 5-ти.*

Вотъ такое равенство двухъ отношеній и есть то, что называется пропорціей, при чемъ *равенство двухъ разностныхъ отношеній образуетъ разностную, или арифметическую пропорцію, а равенство двухъ кратныхъ отношеній образуетъ кратную, или геометрическую пропорцію.*

Всякая пропорція состоитъ изъ четырехъ чиселъ, которыя и называются *членами* ея: первое и четвертое числа (12 и 14, 24 и 5) называются *крайними членами* пропорціи, а второе и третье (8 и 18, 6 и 20) — *средними членами* ея.

**Зависимость между членами арифметической пропорціи.**

Во всякой *арифметической* пропорціи **сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ**. Такъ, въ пропорціи:  $15 - 6 = 11 - 2$  сумма 15-ти и 2-хъ равна суммѣ 6-ти и 11-ти, т.-е. 17-ти; въ пропорціи:  $35 - 20 = 25 - 10$  крайніе члены 35 и 10 даютъ въ суммѣ столько же, сколько средніе 20 и 25, т.-е. 45. Отсюда мы приходимъ къ выводу, что *если сумма двухъ какихъ-нибудь чиселъ равна суммѣ двухъ другихъ*, то изъ этихъ четырехъ чиселъ можно составить пропорцію, взявъ одну пару средними членами, а другую крайними. Напримѣръ: сумма 13-ти и 12-ти равна суммѣ 16-ти и 9-ти; взявъ 13 и 12 средними членами и 16 и 9 крайними, получимъ пропорцію:

$$16 - 13 = 12 - 9.$$

Эта зависимость между членами арифметической пропорціи позволяетъ намъ отыскивать по тремъ даннымъ членамъ пропорціи неизвѣстный четвертый. Пусть намъ дана пропорція:  $x - 5 = 19 - 10$ , въ которой  $x$  обозначаетъ неизвѣстный крайній членъ. Такъ какъ сумма крайнихъ равна суммѣ среднихъ, то, прибавивъ къ иксу 10, мы должны получить  $19 + 5$ , т.-е. 24. Возникаетъ теперь вопросъ: къ какому числу слѣдуетъ прибавить 10, чтобы получить 24? Къ числу, равному 24-мъ безъ 10-ти, т.-е. къ 14-ти. Итакъ, неизвѣстный крайній членъ мы опредѣлили вычитаніемъ извѣстнаго крайняго изъ суммы среднихъ. Наподобіе этого опредѣляется и любой членъ ари-



метической пропорции при данных трех членах; при этомъ руководствуются слѣдующими правилами:

*неизвѣстный крайній членъ равенъ суммѣ среднихъ безъ извѣстнаго крайняго, и*

*неизвѣстный средній членъ равенъ суммѣ крайнихъ безъ извѣстнаго средняго.*

### УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Сумма крайнихъ членовъ арифметической пропорции 47; одинъ средній—19. Найти другой средній.

$$1) 47 - 19 = 28.$$

2) Написать арифметическую пропорцію, одинъ крайній членъ которой 10, а средніе 5 и 7.

$$2) 10 - 5 = 7 - 2.$$

3) Определить значеніе буквы  $x$  въ слѣдующихъ пропорціяхъ:

$$\text{а) } x - 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} - 2; \text{ б) } 9,5 - x = 7,09 - 3; \text{ в) } 12 - 2,15 = x - 14,1; \text{ г) } 24 - 15 = 31,14 - x.$$

$$\text{3) а) } x = (3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}) - 2 = 5\frac{1}{2}; \text{ б) } x = (9,5 + 3) - 7,09 = 5,41; \text{ в) } x = (12 + 14,1) - 2,15 = 23,95; \text{ г) } x = (15 + 31,14) - 24 = 22,14.$$

### Зависимость между членами геометрической пропорции.

Во всякой геометрической пропорции произведение крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.

Такъ, въ пропорціи  $18 : 6 = 15 : 5$  произведение 18-ти и 5-ти равно произведенію 15-ти и 6-ти, ибо  $18 \times 5$  и  $15 \times$

$\times 6$  будетъ 90; въ пропорціи  $36 : 12 = 9 : 3$  произведение 36-ти и 3-хъ равно 108-ми, и произведение 12-ти и 9-ти также равно 108-ми. Это свойство членовъ кратной пропорціи говоритъ намъ о томъ, что не изъ всякихъ четырехъ чиселъ можно составить пропорцію, и что не всякія четыре числа, слѣдовательно, пропорціональны. На основаніи этого свойства мы можемъ убѣдиться въ томъ, правильно ли составлена данная пропорція или нѣтъ. Только въ томъ случаѣ, если произведение двухъ какихъ-нибудь чиселъ равно произведенію двухъ другихъ, изъ такихъ четырехъ чиселъ можно составить пропорцію, взявъ первую пару средними членами, а вторую крайними или наоборотъ. Произведение 14-ти и 3-хъ, напримѣръ, равно произведенію 6-ти и 7-ми; принявъ 14 за одинъ крайній членъ и 3—за другой крайній, 7—за одинъ средній и 6—за другой, составимъ пропорцію:

$$14 : 7 = 6 : 3.$$

Можно было бы за крайніе члены принять 7 и 6, а за средніе 14 и 3; тогда составила бы пропорція:

$$7 : 14 = 3 : 6.$$

Эта вторая пропорція новая по сравненію съ первой, ибо знаменатель ея отношеній равенъ не 2-мъ, какъ въ первой, а  $\frac{1}{2}$ ; но произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ въ обѣихъ пропорціяхъ совершенно одинаковы: произведение крайнихъ первой пропорціи =  $14 \times 3$ , т.-е. 42; произведение крайнихъ второй пропорціи =  $7 \times 6$ , т.-е. тоже 42; произведенія среднихъ въ первой и второй =  $7 \times 6$  и  $14 \times 3$ , т.-е. тоже одинаковы. Ближе присмотрѣвшись къ этимъ двумъ пропорціямъ, мы замѣтимъ, что вторая получилась изъ первой простой перестановкой членовъ: въ первой пропорціи 14—



крайній членъ, во второй 14—средній членъ; въ первой пропорціи 7—средній членъ, во второй — крайній; такое же перемѣщеніе членовъ произошло и во второмъ отношеніи ( $6 : 3$  и  $3 : 6$ ).

Вообще, во всякой кратной пропорціи можно переставить средніе члены, крайніе члены, а также средніе на мѣсто крайнихъ и крайніе на мѣсто среднихъ. И хотя отъ такой перестановки членовъ изъ данной пропорціи получаются пропорціи съ все новыми знаменателями отношеній, но пропорціональность чиселъ, составляющихъ данную пропорцію, какъ говорятъ, *не нарушается*, ибо во всѣхъ этихъ пропорціяхъ произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ. На этомъ основаніи изъ всякой пропорціи, не нарушая ея, можно составить нѣсколько другихъ новыхъ пропорцій. Изъ пропорціи  $14 : 7 = 6 : 3$ , напримѣръ, можно составить слѣдующія другія:

$14 : 7 = 6 : 3$  (это данная пропорція);

1)  $14 : 6 = 7 : 3$  (перестановка среднихъ членовъ);

2)  $3 : 7 = 6 : 14$  (перестановка крайнихъ членовъ);

3)  $7 : 14 = 3 : 6$  (перестановка крайнихъ на мѣсто среднихъ и среднихъ на мѣсто крайнихъ).

Каждая изъ полученныхъ такимъ образомъ трехъ пропорцій выражаетъ пропорціональность тѣхъ же четырехъ чиселъ, что и данная пропорція; но, въ то время какъ знаменатель отношеній данной пропорціи равенъ 2-мъ ( $14 : 7 = 2$  и  $6 : 3 = 2$ ), знаменатель отношеній первой полученной пропорціи равенъ  $2\frac{1}{3}$  ( $14 : 6 = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$  и  $7 : 3 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ ), знаменатель второй равенъ  $\frac{2}{3}$  ( $3 : 7 = \frac{3}{7}$  и  $6 : 14 = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ ) и знаменатель третьей —  $\frac{1}{2}$  ( $7 : 14 = \frac{1}{2}$  и  $3 : 6 = \frac{1}{2}$ ).

Какъ въ данной пропорціи, такъ и въ трехъ полученныхъ изъ нея пропорціяхъ, можно было бы переставить первое отношеніе на мѣсто второго и второе на мѣсто первого:

$6 : 3 = 14 : 7$  (перестановка отношеній въ данной пропорціи);

$7 : 3 = 14 : 6$  (перестановка отношеній въ первой полученной пропорціи);

$6 : 14 = 3 : 7$  (перестановка отношеній во второй пропорціи);

$3 : 6 = 7 : 14$  (перестановка отношеній въ третьей пропорціи).

Само собой понятно, что эти послѣднія пропорціи уже не новыя по сравненію съ тѣми, отъ которыхъ онѣ произошли, ибо отъ перестановки одного отношенія на мѣсто другого не только не нарушается пропорціональность чиселъ, но даже не измѣняется знаменатель отношеній.

Пользуясь тѣмъ же, что произведеніе крайнихъ членовъ въ кратной пропорціи равно произведенію среднихъ, мы легко можемъ опредѣлять неизвѣстный членъ кратной пропорціи по тремъ даннымъ членамъ ея.

Пусть мы имѣемъ пропорцію  $x : 15 = 3 : 9$ , гдѣ буква  $x$  обозначаетъ неизвѣстный крайній членъ. Такъ какъ произведеніе крайнихъ должно быть равно произведенію среднихъ, то, умноживъ  $x$  на 9 или 9 на  $x$ , мы должны получить число, равное  $15 \times 3$ , т.-е. 45-ти; а чтобы получить 45, нужно 9 умножить на 5. Итакъ,  $x$ , т.-е. неизвѣстный крайній членъ пропор-



цій, равень 5-ти, т.-е. частному отъ дѣленія произведенія среднихъ членовъ на извѣстный крайній.

Вообще, когда приходится опредѣлять неизвѣстный членъ кратной пропорціи по даннымъ тремъ членамъ ея, руководствуются слѣдующими правилами:

*крайній членъ пропорціи равень произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній;*

*средній членъ пропорціи равень произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.*

Укажемъ еще на одно важное свойство кратныхъ пропорцій. Мы знаемъ, что знаменатель отношенія не измѣнится, если оба члена его умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число. Поэтому, если мы, положимъ, умножимъ члены какого-либо отношенія пропорціи, напр., перваго, на одно и то же число, то равенство между вновь полученнымъ отношеніемъ и вторымъ отношеніемъ сохранится. Пусть у насъ имѣется такая пропорція:  $64 : 16 = 32 : 8$ . Умноживъ члены перваго отношенія на 2, получимъ  $128 : 32$ ; знаменатель этого отношенія равень 4, а знаменатель отношенія  $32 : 8$  тоже равень 4. Слѣдовательно, мы можемъ написать пропорціи:  $128 : 32 = 32 : 8$ . Мы могли бы оба члена перваго отношенія уменьшить, напр., въ 4 раза; въ этомъ случаѣ получимъ пропорцію:  $16 : 4 = 32 : 8$ , ибо знаменатель вновь полученнаго отношенія ( $16 : 4$ ) равень знаменателю второго отношенія ( $32 : 8$ ), оставшагося безъ измѣненія. Точно также мы могли бы увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ члены второго отношенія данной пропорціи; вновь полученная пропорція, по существу, ничѣмъ не будетъ отличаться отъ данной.

Наконецъ, можно было бы оба члена перваго отношенія и оба члена второго отношенія, иначе говоря—всѣ четыре члена пропорціи, увеличить или уменьшить въ одинаковое число разъ, и полученная пропорція все-таки была бы такой же, какъ и первоначальная.

Вообще, такъ какъ отношеніе двухъ чиселъ не измѣняется отъ увеличенія или уменьшенія каждаго изъ нихъ въ одинаковое число разъ, то и пропорціональность четырехъ чиселъ не нарушится, если оба члена каждаго изъ отношеній увеличить или уменьшить въ одинаковое число разъ и даже если всѣ четыре члена одновременно увеличить или уменьшить въ одинаковое число разъ.

Вотъ это свойство кратныхъ пропорцій даетъ намъ возможность сокращать ее, т.-е. выразить пропорцію въ меньшихъ числахъ, и освободить ее отъ дробныхъ членовъ, замѣнивъ ихъ цѣлыми.

Пусть намъ дана пропорція:  $72 : 48 = 54 : 36$ . Сократить ее мы можемъ, или, напримѣръ, раздѣливъ оба члена перваго отношенія на 8, отъ чего получится пропорція  $9 : 6 = 54 : 36$ ; или раздѣливъ оба члена второго отношенія на 9, отъ чего получится пропорція  $72 : 48 = 6 : 4$ ; или, наконецъ, раздѣливъ всѣ четыре члена на 6, отъ чего получится пропорція  $12 : 8 = 9 : 6$ .



Обыкновенно, когда члены пропорции выражены въ цѣлыхъ числахъ, раздѣляютъ (сокращаютъ) всѣ члены пропорции на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, какъ мы поступили въ послѣднемъ случаѣ.

Пусть мы имѣемъ другую пропорцію  $3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{20} : \frac{3}{4}$ . Чтобы освободиться отъ дробныхъ членовъ, обратимъ сначала всѣ члены ея въ неправильныя дроби  $\frac{7}{2} : \frac{5}{2} = \frac{21}{20} : \frac{3}{4}$ . А теперь можно въ первомъ отношеніи просто отбросить знаменателя 2, — ибо отбрасываніемъ знаменателя мы умножаемъ члены отношенія на 2, отъ чего пропорціональность не нарушится, — а во второмъ отношеніи привести члены къ общему знаменателю и затѣмъ уже отбросить его, по той же причинѣ. Отъ отбрасыванія знаменателя, знаемъ мы, отношеніе не измѣняется — дробные члены лишь замѣняются цѣлыми, — и, такимъ образомъ, пропорція  $\frac{7}{2} : \frac{5}{2} = \frac{21}{20} : \frac{3}{4}$  преобразуется въ пропорцію  $7 : 5 = 21 : 15$ . Также точно пропорція  $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{8}{9} : \frac{80}{81}$ , посредствомъ приведенія членовъ каждого отношенія къ общему знаменателю, можетъ быть преобразована въ пропорцію:  $\frac{9}{12} : \frac{10}{12} = \frac{72}{81} : \frac{80}{81}$  (ибо общимъ знаменателемъ для перваго отношенія будетъ 12, а для второго — 81), а въ этой послѣдней можно отбросить знаменателей, отъ чего получится пропорція:  $9 : 10 = 72 : 80$ . Если приведемъ къ общему знаменателю всѣ члены пропорции  $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{8}{9} : \frac{80}{81}$  (общій знаменатель 324), то она приметъ такой видъ:  $\frac{3 \cdot 81}{324} : \frac{5 \cdot 54}{324} = \frac{8 \cdot 36}{324} : \frac{80 \cdot 4}{324}$ , а отбросивъ знаменателей, получимъ:  $243 : 270 = 288 : 320$ .

Такъ какъ въ пропорціи можно переставлять средніе или крайніе члены, то мы можемъ умножить или раздѣлить на одно и то же число оба предыдущіе члена или оба послѣдующіе. Возьмемъ, напр., пропорцію  $72 : 48 = 54 : 36$ . Переставивъ средніе, получимъ  $72 : 54 = 48 : 36$ ; раздѣливъ члены перваго отношенія на 9, получимъ пропорцію  $8 : 6 = 48 : 36$ ; переставивъ опять оба средніе, получимъ  $8 : 48 = 6 : 36$ . Сравнивъ послѣднюю пропорцію съ данной, убѣдимся въ томъ, что оба предыдущіе члена можно умножить или раздѣлить на одно и то же число, и т. д.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Проверить слѣдующія пропорціи и указать, въ чемъ заключается ошибка, если таковая имѣется:

a)  $5 : 9 = 4 : 8$ ;

b)  $11 : 12 = \frac{4}{7} : \frac{48}{7}$ ;

c)  $49 : 63 = 21 : 30$ .

2) Написать геометрическую пропорцію, одинъ крайній членъ которой  $\frac{11}{18}$ , а средніе 6 и 9.

1) a) Произведеніе крайнихъ  $5 \times 8 = 40$ , произведеніе среднихъ  $9 \times 4 = 36$ ; пропорція, слѣдовательно, невѣрна. б) Произведеніе крайнихъ  $11 \times \frac{48}{7} = \frac{48}{7}$ , произведеніе среднихъ  $12 \times \frac{4}{7} = \frac{48}{7}$ ; пропорція вѣрна. c)  $49 \times 30 = 1470$ ;  $63 \times 21 = 1323$ ; пропорція невѣрна.

2) Незвѣстный крайній равенъ  $(6 \times 9) : \frac{11}{18} = \frac{54 \cdot 18}{11} = \frac{972}{11} = 88\frac{4}{11}$ ; искома пропорція, такимъ образомъ, будетъ  $\frac{11}{18} : 6 = 9 : 88\frac{4}{11}$ .



3) Найти значенія *икса* въ слѣдующихъ пропорціяхъ: а)  $x : 9 = 7\frac{1}{3} : 11$ ; б)  $4 : x = \frac{8}{15} : \frac{2}{3}$ ; в)  $\frac{14}{3} : \frac{2}{3} = x : \frac{15}{15}$ ; д)  $\frac{5}{3} : 5 = 9 : x$ .

4) Привести къ простѣйшему виду (посредствомъ сокращенія и приведенія къ общему знаменателю) слѣдующія пропорціи:

а)  $16 : \frac{2}{3} = 30\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$ ;

б)  $\frac{33}{33} : \frac{11}{11} = \frac{11}{33} : \frac{11}{11}$ ;

в)  $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{1}{6} : \frac{2}{15}$ .

3) а)  $x = (9 \times 7\frac{1}{3}) : 11 = 6$ ; б)  $x = (4 \times \frac{8}{15}) : \frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$ ; в)  $x = (\frac{14}{3} \times \frac{15}{15}) : \frac{2}{3} = 10$ ; д)  $x = (5 \times 9) : \frac{5}{3} = 72$ .

4) а) Въ пропорціи  $16 : \frac{2}{3} = \frac{216}{7} : \frac{2}{3}$  удобно во второмъ отношеніи сразу отбросить знаменателя, а въ первомъ—16 умножить на 9; тогда она приметъ такой видъ:  $144 : 2 = 216 : 3$ ; первый крайній членъ можно сократить со вторымъ среднимъ на 72, отъ чего получится пропорція  $2 : 2 = 3 : 3$ . б) Въ этой пропорціи удобно привести къ общему знаменателю  $\frac{33}{33}$  и  $\frac{11}{33}$ ,  $\frac{11}{11}$  и  $\frac{11}{11}$ , отъ чего получимъ:  $(12 \times 3) : (11 \times 3) = 12 : 11$ , или  $36 : 33 = 12 : 11$ ; сокративъ на 3 первое отношеніе, получимъ:  $12 : 11 = 12 : 11$ . в) Приведемъ всѣ члены къ одному знаменателю; общимъ знаменателемъ будетъ 60, и пропорція получится такая:  $15 : 12 = 10 : 8$ ; сокративъ первое отношеніе на 3, а второе — на 2, получимъ:  $5 : 4 = 5 : 4$ .

#### § 44. Непрерывныя пропорціи.

Нерѣдко случается, что въ геометрической пропорціи оба крайніе или оба средніе члена одинаковы. Такъ, въ пропорціи  $12 : 24 = 24 : 48$  одинаковы средніе члены; въ пропорціи  $\frac{1}{2} : 12 = \frac{1}{48} : \frac{1}{2}$  одинаковы крайніе члены. Всѣ подобныя пропорціи называются **непрерывными**.

Такъ какъ во всякой геометрической пропорціи можно, не нарушая ея, переставить крайніе члены на мѣсто среднихъ и средніе на мѣсто крайнихъ, то всякую непрерывную геометрическую пропорцію можно представить въ такомъ видѣ, что одинаковыми окажутся въ ней всегда средніе члены. Наприм., изъ пропорціи  $\frac{1}{2} : 12 = \frac{1}{48} : \frac{1}{2}$ , переставивъ въ ней крайніе члены на мѣсто среднихъ, мы получимъ пропорцію  $12 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{48}$ , т.-е. одинаковыми оказались уже не крайніе, а средніе члены. Поэтому повторяющійся членъ всякой непрерывной геометрической пропорціи иначе еще называется **среднимъ геометрическимъ числомъ** двухъ другихъ членовъ ея.

Само собой понятно, что для составленія непрерывной геометрической пропорціи достаточно знать произведеніе одной пары членовъ и одинъ изъ этихъ членовъ. Такъ, пусть произведеніе крайнихъ членовъ какой-нибудь непрерывной пропорціи будетъ 225, а одинъ изъ нихъ — 10. Другой крайній, очевидно, будетъ  $225 : 10$ , или 22,5. Произведеніе среднихъ тоже 225; а такъ какъ они одинаковы, то каждый изъ нихъ равенъ 15-ти, ибо  $15 \times 15 = 225$ . Мы, такимъ образомъ, можемъ составить слѣдующую пропорцію:  $10 : 15 = 15 : 22,5$ .

Въ пропорціи  $\frac{1}{2} : 12 = \frac{1}{48} : \frac{1}{2}$ , какъ уже сказано, мы называемъ  $\frac{1}{2}$  среднимъ геометрическимъ 12-ти и  $\frac{1}{48}$ . Поэтому среднее геометрическое ( $\frac{1}{2}$ ) во столь-



ко разъ меньше одного изъ чиселъ (12), во сколько разъ второе число ( $\frac{1}{48}$ ) меньше средняго геометрическаго, или во сколько разъ среднее геометрическое больше втораго числа ( $\frac{1}{48}$ ). Поэтому на практикѣ подъ именемъ средняго геометрическаго числа двухъ чиселъ подразумѣвается такое число, которое во столько же разъ меньше (или больше) одного изъ данныхъ чиселъ, во сколько разъ оно больше (или меньше) другого; находятъ его безъ составленія пропорціи. Такъ какъ произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 12 \cdot \frac{1}{48}$ , и мы можемъ сказать, что среднее геометрическое число ( $\frac{1}{2}$ ) данныхъ чиселъ (12 и  $\frac{1}{48}$ ) есть то число, которое, будучи умножено само на себя, дастъ произведеніе данныхъ чиселъ. Наприм., среднее геометрическое 27-ми и 3-хъ есть число, которое, будучи умножено само на себя, дастъ  $27 \times 3$ , или 81, а такимъ числомъ является 9; среднее геометрическое 18-ти и 8-ми — 12, ибо  $12 \times 12$  дастъ произведеніе  $18 \times 8$ , т.-е. 144.

Бываютъ и *непрерывныя арифметическія пропорціи*. Это такія *арифметическія пропорціи*, въ которыхъ средніе члены одинаковы, какъ, напри-  
мѣръ, пропорціи:  $18 - 10 = 10 - 2$ ;  $36 - 20 = 20 - 4$  и т. п.

Повторяющійся средній членъ арифметической пропорціи называется **среднимъ арифметическимъ числомъ** двухъ другихъ членовъ ея.

Такъ какъ въ арифметической пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ, то, понятно, средній членъ непрерывной арифметической пропорціи равенъ половинѣ суммы крайнихъ членовъ ея. Такъ, въ пропорціи:  $16 - x = x - 8$  сумма крайнихъ членовъ равна  $16 + 8 = 24$ ; такова же, конечно, и сумма среднихъ, т.-е. сумма двухъ *иксовъ*. А такъ какъ два средніе члена одинаковы, то каждый изъ нихъ равенъ половинѣ 24-хъ, т.-е. 12-ти. На этомъ основаніи можно сказать, что *среднее арифметическое число двухъ чиселъ равно половинѣ ихъ суммы*. Этимъ пользуются при нахожденіи средняго арифметическаго на практикѣ, гдѣ подъ среднимъ арифметическимъ числомъ двухъ чиселъ подразумѣвается число, которое на столько же больше одного изъ данныхъ чиселъ, на сколько и меньше другого. Наприм., среднее арифметическое 14-ти и 16-ти есть  $(14 + 16) : 2$ , т.-е. 15; среднее арифметическое  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{5}{6}$  есть  $(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}) : 2$ , то-есть  $\frac{1}{2}$ .

На практикѣ приходится даже иногда отыскивать среднее арифметическое нѣсколькихъ чиселъ. Въ такихъ случаяхъ *сумму всѣхъ чиселъ дѣлятъ на число ихъ*,—полученное частное и есть среднее арифметическое данныхъ чиселъ. Такъ, среднее арифметическое трехъ чиселъ: 11-ти, 15-ти и 24-хъ есть  $(11 + 15 + 24) : 3 = 16\frac{2}{3}$ .

## УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Написать непрерывную геометрическую пропорцію, произведеніе среднихъ членовъ которой равно 49, а одинъ изъ крайнихъ 6.

1) Другой крайній, очевидно, равенъ  $49 : 6 = 8\frac{1}{6}$ , а каждый изъ среднихъ равенъ 7-ми; искомая пропорція  $8\frac{1}{6} : 7 = 7 : 6$ .



2) Определить значения  $x$  въ слѣдующихъ пропорціяхъ: а)  $10\frac{1}{2} - x = x - 3$ ; б)  $40 - x = x - 11$ ; в)  $\frac{1}{3} - x = x - \frac{1}{6}$ .

3) Въ первомъ классѣ гимназіи 50 учениковъ, во второмъ 40 учениковъ, въ третьемъ 35 учениковъ и въ четвертомъ 31 ученикъ. По сколько учениковъ среднимъ числомъ приходится на каждый изъ четырехъ классовъ гимназіи?

4) Утромъ термометръ Реомюра показывалъ 10,2 градуса мороза, въ полдень—7,6 градуса и вечеромъ—12,8 градуса. Какова была средняя температура дня?

2) а)  $x = (10\frac{1}{2} + 3) : 2 = 6\frac{3}{4}$ ; б)  $x = (40 + 11) : 2 = 25\frac{1}{2}$ ; в)  $x = (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) : 2 = \frac{5}{24}$ .

3) Узнать, по сколько учениковъ среднимъ числомъ приходится на каждый классъ,—значить найти среднее арифметическое данныхъ четырехъ чиселъ:  $(50 + 40 + 35 + 31) : 4 = 39$  учениковъ.

4)  $(10,2^0 + 7,6^0 + 12,8^0) : 3 = 10,2^0$ .

### § 45. Производныя пропорціи.

При рѣшеніи арифметическихъ задачъ главнымъ образомъ приходится имѣть дѣло не съ разностными пропорціями, а съ кратными, и мы поэтому въ дальнѣйшемъ будемъ изучать только кратныя пропорціи, которыя будемъ называть просто пропорціями. Вездѣ, значить, гдѣ будетъ рѣчь о пропорціи, мы будемъ подразумѣвать кратную пропорцію.

Намъ уже извѣстно, что основнымъ признакомъ пропорціональности четырехъ чиселъ является равенство произведенія двухъ изъ нихъ произведенію двухъ другихъ. Изъ такихъ четырехъ чиселъ можно составить пропорцію, а изъ этой пропорціи, путемъ перестановки ея членовъ, можно составить нѣсколько другихъ пропорцій. Разсмотримъ еще одинъ, кромѣ перестановки членовъ, способъ образованія новыхъ пропорцій изъ одной данной.

Возьмемъ пропорцію:  $18 : 9 = 24 : 12$ . Прибавимъ къ предыдущему члену перваго отношенія его слѣдующій и къ предыдущему члену втораго отношенія его слѣдующій, т.-е. къ 18-ти прибавимъ 9 и къ 24-мъ прибавимъ 12. Теперь замѣнимъ предыдущій членъ перваго отношенія первой суммой, а предыдущій членъ втораго отношенія второй суммой. Полученная нами пропорція приметъ такой видъ:  $(18 + 9) : 9 = (24 + 12) : 12$ , или  $27 : 9 = 36 : 12$ . Эта пропорція вѣрна, ибо произведеніе ея крайнихъ ( $27 \times 12 = 324$ ) равно произведенію среднихъ ( $9 \times 36 = 324$ ); вмѣстѣ съ тѣмъ эта пропорція новая по сравненію съ взятой нами пропорціей, ибо знаменатель отношеній въ послѣдней равенъ 2-мъ ( $18 : 9 = 2$  и  $24 : 12 = 2$ ), а въ первой онъ равенъ 3-мъ ( $27 : 9 = 3$  и  $36 : 12 = 3$ ).

Послѣдующіе члены обоихъ отношеній полученной пропорціи, т.-е. первый средній и второй крайній члены ея, тѣ же, что и во взятой нами пропорціи, а именно: 9 и 12; предыдущіе же члены обоихъ отношеній, т.-е. первый крайній и второй средній члены, не тѣ, что въ первоначально взятой пропорціи: предыдущій членъ перваго отношенія *полученной* пропорціи  $(18 + 9)$  представляетъ собой сумму предыдущаго и слѣдующаго членовъ перваго отношенія *первоначально взятой* пропорціи; предыдущій членъ втораго отношенія *полученной* пропорціи  $(24 + 12)$  есть тоже сумма предыдущаго и слѣдующаго втораго отношенія *взятой* пропорціи.



На этомъ основаніи мы можемъ сказать, что изъ всякой пропорціи можно составить новую пропорцію, увеличивъ предыдущій членъ каждого отношенія послѣдующимъ членомъ его, а послѣдующій каждого отношенія оставивъ тотъ же. Это выражается еще и такъ: *во всякой пропорціи сумма членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему такъ же, какъ сумма членовъ втораго отношенія относится къ своему послѣдующему*. Такъ какъ отъ прибавленія къ дѣлимому дѣлителя частное увеличивается на единицу, то, само собою понятно, и въ пропорціи, составленной изъ данной прибавленіемъ послѣдующихъ къ предыдущимъ, знаменатель отношеній всегда больше знаменателя отношеній данной пропорціи на единицу.

Возьмемъ теперь пропорцію  $24 : 8 = 6 : 2$ . Вычтемъ изъ предыдущаго члена перваго отношенія его послѣдующій, а изъ предыдущаго втораго отношенія его же послѣдующій. Замѣнивъ предыдущій членъ перваго отношенія данной пропорціи первой разностью, а предыдущій членъ втораго отношенія второй разностью, получимъ слѣдующую пропорцію:  $(24 - 8) : 8 = (6 - 2) : 2$ , или  $16 : 8 = 4 : 2$ .

Пропорція эта вѣрна, ибо произведеніе ея крайнихъ равно произведенію среднихъ ( $16 \times 2 = 8 \times 4$ ), и, кромѣ того, знаменатель отношеній этой пропорціи на единицу меньше знаменателя первоначально взятой нами пропорціи, ибо отношеніе  $24 : 8$  равно 3-мъ, а отношеніе  $16 : 8$  равно 2, отношеніе  $6 : 2$  равно 3-мъ, а отношеніе  $4 : 2$  равно 2. Отнявъ послѣдующій членъ каждого отношенія отъ его предыдущаго, мы, такимъ образомъ, получили еще одну новую пропорцію изъ той же первоначально взятой пропорціи. Сравнивая эту вторую полученную пропорцію съ первоначальной, мы видимъ, что послѣдующіе члены обоихъ отношеній въ каждой изъ нихъ тѣ же самые; предыдущіе же члены обоихъ отношеній *полученной* пропорціи представляютъ собою разность членовъ каждого изъ отношеній *первоначальной* пропорціи.

Вообще, *во всякой пропорціи разность членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему, какъ разность членовъ втораго отношенія къ своему послѣдующему*; на этомъ основаніи можно изъ всякой пропорціи составить новую, уменьшивъ предыдущій членъ каждого отношенія его послѣдующимъ, а послѣдующій оставивъ тотъ же.

Взявъ первую нами данную пропорцію  $18 : 9 = 24 : 12$ , мы составимъ, согласно изложенному, такую пропорцію:  $(18 - 9) : 9 = (24 - 12) : 12$ , или  $9 : 9 = 12 : 12$ .

Итакъ, изъ пропорціи  $18 : 9 = 24 : 12$  нами составлены двѣ *новыя* пропорціи: 1)  $(18 + 9) : 9 = (24 + 12) : 12$ , или  $27 : 9 = 36 : 12$ , и 2)  $(18 - 9) : 9 = (24 - 12) : 12$ , или  $9 : 9 = 12 : 12$ .

Новыя пропорціи, получаемыя изъ данной подобно полученнымъ нами двумя пропорціямъ, называются **производными пропорціями**.

Возьмемъ первую производную пропорцію:  $(18 + 9) : 9 = (24 + 12) : 12$  и первоначально взятую нами пропорцію:  $18 : 9 = 24 : 12$ . Въ обѣихъ этихъ



пропорціяхъ переставимъ средніе члены; отъ перестановки среднихъ членовъ первая приметъ такой видъ:

$$(18 + 9) : (24 + 12) = 9 : 12,$$

а вторая:

$$18 : 24 = 9 : 12.$$

Второе отношеніе въ обѣихъ только что полученныхъ пропорціяхъ одно и то же, а именно  $9 : 12$ ; если же вторыя отношенія этихъ пропорцій равны, то равны и первыя ихъ отношенія. Такъ какъ равенство двухъ отношений составляетъ пропорцію, то изъ первыхъ отношений этихъ пропорцій можно составить такую пропорцію:  $(18 + 9) : (24 + 12) = 18 : 24$ . Переставивъ въ этой послѣдней пропорціи средніе члены, получимъ пропорцію:

$$(18 + 9) : 18 = (24 + 12) : 24.$$

Это—третья производная пропорція.

Ближе присмотрѣвшись къ этой пропорціи, мы замѣтимъ, что предыдущіе члены перваго и втораго отношений представляютъ собой сумму членовъ перваго и втораго отношений первоначально взятой пропорціи, а послѣдующіе члены обоихъ отношений суть предыдущіе члены отношений первоначально взятой пропорціи. Иначе говоря, *во всякой пропорціи сумма членовъ перваго отношенія относится къ своему предыдущему такъ, какъ сумма членовъ втораго отношенія относится къ своему предыдущему*. На этомъ основаніи изъ всякой пропорціи можно составить новую, увеличивъ предыдущій членъ каждаго отношенія его послѣдующимъ и поставивъ на мѣсто послѣдующаго предыдущій.

Если мы возьмемъ пропорцію  $18 : 9 = 24 : 12$  и вторую производную  $(18 - 9) : 9 = (24 - 12) : 12$  и переставимъ въ нихъ средніе члены, то получимъ такіа двѣ пропорціи:

$$18 : 24 = 9 : 12 \text{ и } (18 - 9) : (24 - 12) = 9 : 12.$$

Въ этихъ пропорціяхъ вторыя отношенія равны; слѣдовательно равны и первыя отношенія, и изъ нихъ можно составить пропорцію  $(18 - 9) : (24 - 12) = 18 : 24$ ; переставивъ здѣсь средніе члены, получимъ пропорцію

$$(18 - 9) : 18 = (24 - 12) : 24.$$

Это—четвертая производная пропорція.

Изъ этой пропорціи мы можемъ заключить, что *во всякой пропорціи разность членовъ перваго отношенія относится къ своему предыдущему такъ, какъ разность членовъ втораго отношенія относится къ своему предыдущему*. Изъ всякой пропорціи, такимъ образомъ, можно составить новую, уменьшивъ предыдущій членъ каждаго отношенія послѣдующимъ и поставивъ на мѣсто послѣдующаго предыдущій.

Наконецъ, возьмемъ третью и четвертую производныя пропорціи:  $(18 + 9) : 18 = (24 + 12) : 24$  и  $(18 - 9) : 18 = (24 - 12) : 24$  и переставимъ въ нихъ средніе члены, отчего онѣ примутъ такой видъ:

$$(18 + 9) : (24 + 12) = 18 : 24 \text{ и } (18 - 9) : (24 - 12) = 18 : 24.$$

Вторыя отношенія этихъ пропорцій равны; равны, слѣдовательно, и первыя отношенія, и изъ нихъ поэтому можно составить пропорцію:



$(18 + 9) : (24 + 12) = (18 - 9) : (24 - 12)$ ; если въ ней переставить средніе члены, получится пропорція:

$$(18 + 9) : (18 - 9) = (24 + 12) : (24 - 12).$$

Принимая во вниманіе данную нами пропорцію  $18 : 9 = 24 : 12$ , мы можемъ сказать, что *во всякой пропорціи сумма членовъ перваго отношенія такъ относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ втораго отношенія относится къ ихъ разности*. И изъ любой пропорціи, такимъ образомъ, можно составить новую, сдѣлавъ сумму членовъ перваго отношенія предыдущимъ и разность членовъ перваго отношенія послѣдующимъ одного отношенія новой пропорціи, а сумму и разность членовъ втораго отношенія сдѣлавъ предыдущимъ и послѣдующимъ другаго отношенія новой пропорціи.

#### § 46. Сложныя пропорціи.

Пусть мы имѣемъ пропорціи:  $18 : 6 = 12 : 4$  и  $12 : 8 = 6 : 4$ . Перемножимъ *почленно* обѣ эти пропорціи, т.-е. умножимъ первый крайній первой пропорціи на первый крайній второй, первый средній на первый средній и т. д. Затѣмъ составимъ такого рода пропорцію:  $(18 \times 12) : (6 \times 8) = (12 \times 6) : (4 \times 4)$ , или  $216 : 48 = 72 : 16$ . Пропорція эта составлена вѣрно, ибо произведеніе крайнихъ членовъ ея ( $216 \times 16 = 3456$ ) равно произведенію среднихъ ( $48 \times 72 = 3456$ ); вмѣстѣ съ тѣмъ эта пропорція новая, ибо знаменатель ея отношеній ( $4\frac{1}{2}$ ) равенъ произведенію знаменателей пропорцій, изъ которыхъ она составлена ( $3 \times 1\frac{1}{2}$ ).

Раздѣлимъ теперь *почленно* пропорцію  $18 : 6 = 12 : 4$  на пропорцію  $12 : 8 = 6 : 4$ ; отъ этого получится пропорція:  $\frac{18}{12} : \frac{6}{8} = \frac{12}{6} : \frac{4}{4}$ , или, по сокращеніи дробей:  $\frac{3}{2} : \frac{3}{4} = 2 : 1$ . Эта пропорція также составлена вѣрно, ибо произведеніе ея крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ; она и новая по сравненію съ пропорціями, изъ которыхъ она образована, ибо знаменатель ея равенъ 2-мъ, т.-е. частному отъ дѣленія знаменателей пропорцій, образовавшихъ ее ( $3 : 1\frac{1}{2}$ ).

Если почленно перемножить одну на другую нѣсколько пропорцій, то и въ такихъ случаяхъ получаются новыя пропорціи.

Всѣ такія пропорціи, которыя *составляются почленнымъ перемноженіемъ или раздѣленіемъ двухъ или нѣсколькихъ пропорцій, называются сложными пропорціями*.

#### Повторительные вопросы и отвѣты.

1) Что называется отношеніемъ двухъ чиселъ?—Третье число, показывающее, во сколько разъ или на сколько единицъ одно число больше другаго или другое меньше перваго.

2) Какія бываютъ отношенія?—Разностныя, или ариметическія, и кратныя, или геометрическія.

3) Какъ называются числа, составляющія отношенія?—Первое число называется предыдущимъ членомъ отношенія, а второе—послѣдующимъ членомъ отношенія.

4) Какъ называются числа, показывающія отношенія двухъ чиселъ?—Въ ариметическомъ отношеніи—разностью отношенія, въ геометрическомъ—знаменателемъ отношенія.



5) Въ какой зависимости находятся между собой члены арифметического отношенія?—Въ такой же, какъ уменьшаемое, вычитаемое и разность въ вычитаніи.

6) Въ какой зависимости находятся члены геометрическаго отношенія?—Въ такой же, какъ дѣлимое, дѣлитель и частное въ дѣленіи.

7) На какомъ основаніи возможно сокращеніе членовъ геометрическаго отношенія?—На основаніи того, что отъ уменьшенія обоихъ членовъ въ одинаковое число разъ знаменатель, а слѣдовательно, и отношеніе,—не измѣнится.

8) Что называется пропорціей?—Равенство двухъ отношеній.

9) Что такое арифметическая пропорція?—Равенство двухъ разностныхъ отношеній.

10) Что такое геометрическая пропорція?—Равенство двухъ кратныхъ отношеній.

11) Какіе члены пропорціи называются средними и какіе крайними?—Предыдущій перваго отношенія и послѣдующій втораго суть крайніе члены пропорціи, послѣдующій перваго отношенія и предыдущій втораго суть средніе члены ея.

12) Каково основное свойство членовъ арифметической пропорціи?—Сумма крайнихъ членовъ ея равна суммѣ среднихъ.

13) Какая арифметическая пропорція называется непрерывной?—Такая, оба средніе члена которой одинаковы.

14) Что такое среднее арифметическое двухъ чиселъ?—Число, которое на столько же больше одного изъ данныхъ чиселъ, на сколько и меньше другого.

15) Какъ находится среднее арифметическое нѣсколькихъ чиселъ?—Дѣленіемъ суммы всѣхъ данныхъ чиселъ на число ихъ.

16) Каково основное свойство членовъ геометрической пропорціи?—Произведеніе крайнихъ членовъ ея равно произведенію среднихъ.

17) Каковъ признакъ пропорціональности четырехъ чиселъ?—Равенство произведенія двухъ изъ нихъ произведенію двухъ другихъ.

18) Что значитъ выраженіе «пропорція не нарушается»?—Оно означаетъ, что отношеніе двухъ чиселъ равно отношенію двухъ другихъ.

19) Что произойдетъ съ пропорціей, если переставить въ ней средніе или крайніе члены?—Получится новая пропорція изъ тѣхъ же четырехъ чиселъ.

20) На какомъ основаніи можно въ пропорціи уничтожить дробные члены?—На основаніи того, что пропорція не нарушится, если всѣ члены ея одновременно увеличить въ одинаковое число разъ.

21) Какая геометрическая пропорція называется непрерывной?—Оба средніе или оба крайніе члена которой одинаковы.

22) Что такое среднее геометрическое двухъ чиселъ?—Число, которое во столько разъ больше одного изъ данныхъ чиселъ, во сколько разъ оно меньше другого.

23) Какія производныя пропорціи можно составить изъ данной пропорціи?—Мы беремъ а) отношеніе суммы или разности членовъ перваго отношенія данной пропорціи къ своему предыдущему и приравниваемъ отношенію суммы или разности членовъ втораго отношенія къ своему предыдущему, б) отношеніе суммы или разности членовъ перваго отношенія данной пропорціи къ своему послѣдующему и приравниваемъ отношенію суммы или разности членовъ втораго отношенія къ своему послѣдующему.

24) Что такое сложная пропорція?—Пропорція, составленная изъ двухъ или нѣсколькихъ пропорцій, почленно умноженныхъ или раздѣленныхъ одна на другую.



## ОТДѢЛЪ VII.

### ПРИМѢНЕНИЕ ПРОПОРЦІЙ ВЪ АРИѠМЕТИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧАХЪ.

Во всякой задачѣ обыкновенно дается нѣсколько какихъ-нибудь величинъ, на основаніи которыхъ требуется отыскать еще одну, а иногда и больше новыхъ величинъ. Всѣ величины въ задачѣ находятся между собой въ извѣстной зависимости, и рѣшить задачу — значить выяснить зависимость между данными величинами и искомой величиной. Есть много задачъ, гдѣ величины находятся въ такой зависимости, что изъ нихъ можно составить кратную пропорцію; искомая величина въ такихъ задачахъ находится на подобіе того, какъ находится любой неизвѣстный членъ геометрической пропорціи. Иначе говоря, есть много задачъ, данныя и искомыя величины въ которыхъ находятся въ пропорціональной зависимости одна отъ другой. Чтобы опредѣлить, какія величины пропорціональны, руководствуются слѣдующимъ простымъ соображеніемъ: *если двѣ величины зависятъ одна отъ другой такъ, что съ увеличеніемъ одной изъ нихъ въ нѣсколько разъ во столько же разъ увеличивается и другая, или съ уменьшеніемъ одной изъ нихъ въ нѣсколько разъ во столько же разъ уменьшается и другая, то, говорятъ, первая величина пропорціональна второй.* Бываетъ и такъ, что съ увеличеніемъ въ нѣсколько разъ одной величины другая во столько же разъ уменьшается, и, наоборотъ, съ уменьшеніемъ въ нѣсколько разъ одной другая во столько же разъ увеличивается, — тогда тоже говорятъ, что первая величина пропорціональна второй. Только въ первомъ случаѣ пропорціональность величинъ мы будемъ называть **прямою**, а во второмъ — **обратной**.

Длина пути, на примѣръ, *прямо пропорціональна* времени, потребному для его прохожденія, ибо, чѣмъ *длиннѣе* путь, тѣмъ *больше* времени требуется, чтобы его пройти. Количество работы *прямо пропорціонально* числу рабочихъ, ибо, чѣмъ *больше* работа, тѣмъ *больше* рабочихъ необходимо для ея совершенія. Время, потребное для совершенія нѣкой работы, *обратно пропорціонально* числу рабочихъ, ибо, чѣмъ *больше* рабочихъ, тѣмъ *меньше* времени продолжится работа, и чѣмъ *меньше* рабочихъ, тѣмъ *больше* времени она продолжится. Количество аршинъ сукна, которое можно купить на нѣкую сумму денегъ, *обратно пропорціонально* цѣнѣ каждаго аршина, ибо, чѣмъ *больше* цѣна одного аршина, тѣмъ *менѣе* аршинъ можно купить на эту сумму, и чѣмъ *меньше* цѣна аршина, тѣмъ *больше* аршинъ можно купить на ту же сумму.

Посмотримъ теперь, какъ рѣшаются подобныя задачи.



## § 47. Простое тройное правило.

**Задача 1.** Лошадь пробѣжала 32 версты въ 4 часа. Сколько верстъ пробѣжитъ она въ 6 часовъ?

Если лошадь пробѣжала въ 4 часа 32 версты, то въ одинъ часъ она пробѣгаетъ въ 4 раза меньше верстъ, т.-е.  $\frac{32}{4} = 8$  верстъ. А въ 6 часовъ она пробѣжитъ въ 6 разъ больше верстъ, нежели въ 1 часъ, т.-е.  $8 \text{ вер.} \times 6 = 48$  верстъ. Для большей наглядности располагаемъ рѣшеніе слѣдующимъ образомъ:

въ 4 часа лошадь пробѣжала 32 версты  
 въ 1 часъ она пробѣгаетъ  $\frac{32}{4}$  версты  
 въ 6 часовъ она пробѣжитъ  $\frac{32 \cdot 6}{4} = 48$  верстъ.

Ясно видно, что для того, чтобы отвѣтить на вопросъ задачи, т.-е. чтобы опредѣлить, сколько верстъ лошадь пробѣжитъ въ 6 часовъ, мы сначала опредѣлили, сколько верстъ она пробѣгаетъ въ *одинъ* часъ; иначе говоря, мы вопросъ задачи *привели къ единицѣ*. Такой способъ рѣшенія задачъ называется поэтому способомъ *приведенія къ единицѣ*.

Эту же задачу, однако, можно рѣшить при помощи пропорцій.

Длина всякаго разстоянія прямо пропорціональна времени, необходимому для его прохожденія: чѣмъ *больше* разстояніе, тѣмъ *больше* времени нужно, чтобы его пройти, и чѣмъ *больше* потрачено времени, тѣмъ *больше* разстояніе пройдено. Значитъ, разсматриваемая первая величина *прямо пропорціональна* второй разсматриваемой величинѣ. Лошадь пробѣжала въ 4 часа 32 версты; въ 6 часовъ она, конечно, пробѣжитъ разстояніе большее, нежели въ 4 часа: 6 часовъ больше 4-хъ часовъ въ  $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$  (раза); слѣдовательно, и разстояніе, которое лошадь пробѣжитъ въ 6 часовъ, будетъ въ полтора раза больше разстоянія, которое она пробѣжала въ 4 часа. Иначе говоря, искомое число верстъ будетъ во столько разъ больше 32-хъ, во сколько разъ 6 больше 4-хъ. Обозначивъ искомое число верстъ черезъ букву *x*, мы можемъ составить такого рода пропорцію: *x* будетъ относиться къ 32мъ такъ, какъ 6 относится къ 4мъ. На письмѣ все это обозначается такъ:

32 версты лошадь пробѣжала въ 4 часа  
*x* верстъ она пробѣжитъ въ 6 часовъ

---

слѣдовательно  $x : 32 = 6 : 4$ .

Въ получившейся такимъ образомъ пропорціи первый крайній членъ неизвѣстенъ, и, чтобы опредѣлить его, нужно произведеніе среднихъ раздѣлить на извѣстный крайній:

$$x = \frac{32 \cdot 6}{4} = 48 \text{ (верстъ).}$$

Такой способъ рѣшенія задачъ называется способомъ *пропорцій*.

Во взятой нами задачѣ даны двѣ величины: разстояніе (версты) и время (часы), при чемъ даны два значенія второй величины (4 часа и 6 часовъ) и только одно значеніе первой (32 версты), а требуется отыскать другое значеніе первой величины. Такъ какъ величины эти прямо пропорціональны,



то съ измѣненіемъ одной изъ нихъ должна такимъ же образомъ измѣниться и другая, т.-е. отношеніе двухъ значеній одной величины должно быть равно отношенію двухъ значеній другой величины. И во всѣхъ подобныхъ задачахъ, гдѣ даны два значенія одной величины и только одно значеніе другой, иско-мое значеніе другой величины обозначаютъ буквой  $x$  и, составивъ пропорцію, опредѣляютъ это искомое значеніе по даннымъ тремъ другимъ.

При составленіи пропорцій въ подобныхъ задачахъ удобнѣе отношенія располагать такъ, чтобы искомое число было предыдущимъ членомъ перваго отношенія, т.-е. первымъ крайнимъ членомъ пропорціи.

Способъ рѣшенія такихъ задачъ посредствомъ пропорцій называется **простымъ тройнымъ правиломъ**. *Простымъ* тройнымъ правиломъ способъ этотъ называется потому, что въ подобныхъ случаяхъ приходится составлять *одну только пропорцію*. Есть задачи, при рѣшеніи которыхъ приходится составить *нѣсколько пропорцій*,—способъ рѣшенія такихъ задачъ называется **сложнымъ тройнымъ правиломъ**.

**Задача 2.** *12 работниковъ могутъ исполнить нѣкоторую работу въ 9 дней. Во сколько дней исполнять эту работу 18 работниковъ?*

Рѣшимъ эту задачу сначала способомъ *приведенія къ единицѣ*.

Если 12 работниковъ могутъ исполнить работу въ 9 дней, то *одинъ* работникъ, очевидно, исполнить ее въ число дней, въ 12 разъ большее 9-ти, а 18 работниковъ исполнять ее въ число дней, въ 18 разъ меньшее произведе-нія  $9 \times 12$ :

12 работниковъ исполняютъ работу въ 9 дней	
1 работникъ исполнить	» въ $9 \times 12$ дней
18 работниковъ исполнять	» въ $\frac{9 \cdot 12}{18} = 6$ дней.

А теперь рѣшимъ эту задачу посредствомъ *тройного правила*.

Количество дней, потребное для исполненія работы, *обратно пропорціо-нально* числу работниковъ: чѣмъ больше работниковъ, тѣмъ меньше дней продолжится работа, и чѣмъ меньше работниковъ, тѣмъ больше дней продол-жится она. Въ первомъ случаѣ работниковъ 12, а во второмъ случаѣ—18: число работниковъ во второмъ случаѣ въ  $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$  раза больше, нежели въ пер-вомъ, а потому времени во второмъ случаѣ потребуется въ полтора раза меньше, нежели въ первомъ. Искомое число дней во столько разъ меньше 9-ти, во сколько разъ 18 больше 12-ти. Нельзя, однако, сказать, что иксъ отно-сится къ 9-ти, какъ 18 относится къ 12-ти, ибо отношеніе  $x : 9$  показываетъ, во сколько разъ  $x$  меньше 9-ти, а отношеніе  $18 : 12$  показываетъ, во сколько разъ 18 больше 12-ти. Нельзя сказать такъ потому, что изъ этихъ двухъ отношеній нельзя составить пропорцію: во всякой пропорціи отношенія должны быть равны, т.-е. знаменатели ихъ должны быть одинаковы, а знаме-натель отношенія  $x : 9$  не можетъ быть равенъ знаменателю отношенія  $18 : 12$ , такъ какъ  $x$  меньше 9-ти, а 18 больше 12-ти<sup>1)</sup>. Чтобы составить въ данномъ

<sup>1)</sup> При рѣшеніи подобныхъ задачъ, въ которыхъ величины находятся въ обратно пропорціо-нальной зависимости одна отъ другой, нерѣдко дѣлаются ошибки такого рода въ составленіи пропорцій. Слѣдуетъ поэтому твердо за-



случаѣ пропорцію, мы должны соединить знакомъ равенства отношеніе  $x : 9$  не съ отношеніемъ  $18 : 12$ , а съ отношеніемъ  $12 : 18$ , при чемъ отношеніе  $x : 9$  беремъ первымъ, а  $12 : 18$  — вторымъ. Итакъ,

12 работниковъ исполняютъ работу въ 9 дней  
 18 работниковъ исполнять       »       въ  $x$  дней

слѣдовательно  $x : 9 = 12 : 18$ ; откуда  $x = \frac{9 \cdot 12}{18} = 6$  (дней).

Въ этой второй задачѣ, какъ и въ первой, даны два значенія одной величины (18 раб. и 12 раб.) и только одно значеніе другой величины (9 дней), и требуется опредѣлить другое значеніе этой послѣдней, т.-е. въ этой задачѣ, какъ и въ первой, посредствомъ пропорціи мы по тремъ даннымъ значеніямъ двухъ величинъ опредѣлили четвертое значеніе, и потому мы рѣшили ее также способомъ простого тройного правила.

Иногда въ условіи задачи даются составныя именованныя числа, и поэтому передъ составленіемъ пропорціи требуется замѣнить ихъ соотвѣтственными простыми именованными числами. Напр.:

Въ 3 дня израсходовано 4 п. 5 фунтовъ сахару. Сколько израсходуютъ въ 5 дней?

Составимъ условіе:

3 дн. . . . . 4 пуда 5 фунтовъ  
 5 дн. . . . .  $x$

Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію задачи, нужно 4 пуда 5 фунтовъ (составное именованное число) замѣнить простымъ именованнымъ числомъ, т.-е. 165 фунт.

Тогда условіе задачи выразится такъ:

3 дн. . . . . 165 ф.  
 5 дн. . . . .  $x$

Имѣя прямую пропорціональность, мы получаемъ слѣдующую пропорцію:

$$x : 165 = 5 : 3,$$

$$\text{откуда } x = \frac{165 \cdot 5}{3} = 275 \text{ фунт.} = 6 \text{ пуд. } 35 \text{ фунтовъ.}$$

Попадаютъ также задачи, гдѣ данныя не выражены въ однородныхъ единицахъ. Въ этихъ задачахъ прежде, чѣмъ приступить къ рѣшенію, нужно замѣнить ихъ однородными величинами. Напр.:

Была вырыта яма длиной въ 10 футовъ въ 3 дня. Сколько дней потребуется для вырытія ямы длиной въ 15 аршинъ?

Въ этой задачѣ длина ямы въ одномъ случаѣ выражена въ футахъ, въ другомъ—въ аршинахъ, т.-е. въ разнородныхъ единицахъ; пропорцію

помнить, что оба отношенія пропорціи непременно должны быть *однородны*, т.-е. оба должны показывать, во сколько разъ каждый предыдущій больше своего послѣдующаго, или же во сколько разъ каждый предыдущій меньше своего послѣдующаго.



же могутъ составлять только величины, выраженные въ однородныхъ единицахъ, а потому нужно 10 фут. и 15 арш. выразить предварительно въ однородныхъ единицахъ; тогда условіе выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{ccccccc} 120 & \text{дюймовъ} & \text{выроютъ} & \text{въ} & 3 & \text{дня} \\ 420 & & \text{»} & & \text{»} & & \text{»} \quad x \end{array}$$

$$x : 3 = 420 : 120; x = \frac{3 \cdot 420}{120} = 1\left(\frac{1}{2}\right) \text{ дня.}$$

Вернемся опять къ первой задачѣ: лошадь пробѣжала 32 версты въ 4 часа. Сколько верстъ пробѣжитъ она въ 6 часовъ?

Способомъ пропорцій мы рѣшили задачу такъ:

(извѣстное значеніе другой величины)	32	версты	пробѣгаетъ	въ	4	часа	(первое значеніе первой величины)
$x$	»	»	»	»	6	»	(второе значеніе первой величины)

$$x : 32 = 6 : 4; x = \frac{32 \cdot 6}{4}.$$

Но  $x = \frac{32 \cdot 6}{4} = 32 \cdot \frac{6}{4}$ . Въ этой задачѣ даны: одно значеніе одной величины и соотвѣтствующее значеніе другой величины; затѣмъ второе значеніе первой величины; требуется же опредѣлить соотвѣтствующее ему значеніе другой величины. Разсматриваемыя величины находятся въ *прямой* пропорціональной зависимости. Поэтому мы можемъ сказать, что *опредѣляемое значеніе другой величины равно извѣстному ея значенію (32) умноженному на отношеніе второго значенія первой величины къ первому ея же значенію ( $\frac{6}{4}$ )*, т.-е.  $x = 32 \cdot \frac{6}{4}$ .

Во второй же задачѣ: 12 работниковъ исполняютъ нѣкоторую работу въ 9 дней. Во сколько дней исполнять эту работу 18 работниковъ?

Способомъ пропорцій мы задачу рѣшаемъ такъ:

(первое значеніе первой величины)	12	раб.	исполняютъ	работу	въ	9	дней	(извѣстное значеніе другой величины)
(второе значеніе первой величины)	18	»	»	ту же	»	»	$x$	»

$$x : 9 = 12 : 18; x = \frac{9 \cdot 12}{18} = 9 \cdot \frac{12}{18}.$$

Разсматриваемыя величины находятся въ *обратной* пропорціональной зависимости. И мы можемъ сказать, что *опредѣляемое значеніе другой величины равно извѣстному ея значенію (9), умноженному на отношеніе первого значенія первой величины ко второму ея же значенію ( $\frac{12}{18}$ )*.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Отвѣты:

Рѣшить слѣдующія задачи сначала способомъ приведенія къ единицъ и потомъ простымъ тройнымъ правиломъ:

1) Поѣздъ проходить въ 8 часовъ 336 верстъ. Сколько верстъ пройдетъ онъ въ  $12\frac{1}{2}$  часовъ?

525 верстъ.



2) На оклейку комнаты пошло 38 кусков обоевъ, шириною въ 14 вершковъ каждый. Сколько поидеть на оклейку этой комнаты такихъ кусковъ обоевъ, длина которыхъ такая же, какъ и первыхъ, а ширина—1 арш. 3 верш.?

28 кусковъ.

### § 48. Сложное тройное правило.

Чтобы уяснить себѣ, что такое сложное тройное правило, какія задачи и какъ рѣшаются посредствомъ него, рассмотримъ слѣдующія задачи:

**Задача 1.** На 4 печи въ теченіе 2-хъ мѣсяцевъ выходитъ 3 сажени дровъ. Сколько дровъ выйдетъ на 8 такихъ же печей въ теченіе 9-ти мѣсяцевъ?

Рѣшимъ сначала эту задачу способомъ приведенія къ единицѣ.

Если на 4 печи въ теченіе двухъ мѣсяцевъ выходитъ 3 саж. дровъ, то на 1 печь въ теченіе того же времени дровъ выйдетъ въ 4 раза меньше, т.-е. 3 саж. : 4 =  $\frac{3}{4}$  сажени,—это въ 2 мѣсяца; а на одну печь въ 1 мѣсяць выйдетъ дровъ еще въ 2 раза меньше, т.-е.  $\frac{3}{4}$  саж.:  $2 = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$  сажени. Коль скоро мы знаемъ уже, сколько дровъ выйдетъ на одну печь въ теченіе одного мѣсяца, то понятно, что на 8 печей въ теченіе одного мѣсяца выйдетъ дровъ въ 8 разъ больше, т.-е.  $\frac{3}{8}$  саж.  $\times 8 = \frac{3 \cdot 8}{8} = 3$  сажени, а въ теченіе 9-ти мѣсяцевъ выйдетъ еще въ 9 разъ больше, т.-е. 3 саж.  $\times 9 = 27$  сажень.

На практикѣ рѣшеніе такихъ задачъ способомъ приведенія къ единицѣ удобно располагать слѣдующимъ образомъ:

на 4 печи	въ теченіе 2-хъ мѣсяц.	выходитъ 3 саж. дровъ;
» 1 печь	»	» 2-хъ » выйдетъ $3 : 4 = \frac{3}{4}$ саж. дровъ;
» 1 »	»	» 1-го » » $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$ » »
» 8 печей	»	» 1-го » » $\frac{3}{8} \times 8 = 3$ » »
» 8 »	»	» 9-ти » » $3 \times 9 = 27$ » »

При помощи *пропорцій* эта задача рѣшается слѣдующимъ образомъ: разбиваемъ эту задачу на нѣсколько элементарныхъ задачъ. Такъ, допускаемъ, что количество мѣсяцевъ не измѣняется, т.-е. предположимъ, что условіе задачи таково: на 4 печи въ теченіе 2-хъ мѣсяцевъ выходитъ 3 сажени дровъ; сколько дровъ выйдетъ на 8 такихъ же печей въ теченіе того же срока?

Пишемъ: на 4 печи уходитъ 3 саж. дровъ въ теченіе 2 мѣс.

» 8 печей уйдетъ  $x$  » » » » »

Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ прямую пропорціональность, и  $x : 3 = 8 : 4$ , откуда  $x = 3 \cdot \frac{8}{4}$  саж. (на основаніи свойствъ пропорціи).

Затѣмъ уже рассуждаемъ такъ:

на 8 печей въ теченіе 2 мѣс. уходитъ  $\frac{3 \cdot 8}{4}$  саж. дровъ  
 » » » » » 9 » уйдетъ  $x$  » »

Имѣя прямую пропорціональность, мы узнаемъ, что  $x : \frac{3 \cdot 8}{4} = 9 : 2$ ; откуда  $x = \frac{3 \cdot 8}{4} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 2} = 27$  саж.



Если мы рассмотрим окончательный результат:  $x = \frac{3 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 2} = 3 \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{9}{2}$ , то увидимъ, что искомое значеніе величины равно произведенію извѣстнаго значенія этой величины (3) на отношенія двухъ значеній другихъ измѣняемыхъ величинъ ( $\frac{8}{4}$  и  $\frac{9}{2}$ ); при чемъ, при прямой пропорціональности берется отношеніе новаго значенія величины къ первоначальному, а при обратной пропорціональности — наоборотъ. Принявъ это во вниманіе, мы можемъ сразу написать искомое значеніе:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \text{печи} & \text{—} & 2 & \text{мѣс.} & \text{—} & 3 \text{ с.} \\ 8 & \text{»} & & 9 & \text{»} & & x \end{array}; x = 3 \text{ с.} \times \frac{8}{4} \times \frac{9}{2} = 27 \text{ саж.}$$

**Задача 2.** 15 землекопѣвъ могутъ прорыть въ 12 дней канаву, длиною въ 220 сажень и шириною въ 9 сажень. Во сколько дней могли бы прорыть 18 землекопѣвъ канаву, длиною въ 1,32 версты и шириною въ 6 сажень?

Запишемъ условіе слѣдующимъ образомъ:

15 земл. въ 12 дней могутъ прорыть канаву въ 220 саж. дл. и 9 с. шир.  
18 » » x » прорують » » 660 » » » 6 » »

Рѣшимъ задачу первоначально приведеніемъ къ единицѣ.

15 земл. прорують канаву длиною въ 220 с., шир. въ 9 с. въ 12 дн.

1	»	»	»	»	220 с.	»	»	9 с.	12.15 дн. *)
1	»	»	»	»	1 с.	»	»	9 с.	$\frac{12 \cdot 15}{220}$ **)
1	»	»	»	»	1 с.	»	»	1 с.	$\frac{12 \cdot 15}{220 \cdot 9}$ ***)
18	»	»	»	»	1 с.	»	»	1 с.	$\frac{12 \cdot 15}{220 \cdot 9 \cdot 18}$ ****)
18	»	»	»	»	660 с.	»	»	1 с.	$\frac{12 \cdot 15 \cdot 660}{220 \cdot 9 \cdot 18}$ *****)
18	»	»	»	»	660 с.	»	»	6 с.	$\frac{12 \cdot 15 \cdot 660 \cdot 6}{220 \cdot 9 \cdot 18}$ *****)

$$x = \frac{\frac{4}{12} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{18} \cdot 220 \cdot 9 \cdot 6}{1} = 20 \text{ дней.}$$

Рѣшимъ эту же задачу при помощи пропорцій:

1) Допуская, что измѣнилось только количество рабочихъ, а длина и ширина канавы остались прежними, мы будемъ имѣть такую задачу:

15 землек. могутъ прорыть канаву въ 12 дней длин. 220 с., шир. 9 с.

18 » прорують ту же » »  $x_1$  » » » » » » »

Такъ какъ, чѣмъ больше будетъ рабочихъ, тѣмъ меньше понадобится дней для прорытія канавы, то мы имѣемъ обратную пропорцію; поэтому, составивъ пропорцію, получимъ:

$$x_1 : 12 = 15 : 18; x_1 = \frac{12 \cdot 15}{18} \text{ дней.}$$

\*) Такъ какъ одному рабочему, чтобы совершить ту же работу, придется работать въ 15 разъ дольше.

\*\*) Такъ какъ, чѣмъ канава короче, тѣмъ меньше дней придется ему работать.

\*\*\*) » » » » » уже, » » » » » » »

\*\*\*\*) 18 рабочимъ потребуется для исполненія той же работы меньшее количество дней, чѣмъ 1 рабочему.

\*\*\*\*\*) Чѣмъ длиннѣе канавы, тѣмъ дольше придется имъ работать.

\*\*\*\*\*) » шире » » » » » » »



- 2) 18 землек. выроють канаву длин. въ 220 с. въ  $\frac{12 \cdot 15}{18}$  дн.  
 » » » » » » 660 » »  $x_2$  »

Такъ какъ, чѣмъ длиннѣе канава, тѣмъ больше дней придется работать, то мы имѣемъ теперь прямую пропорціональность:

$$x_2 : \frac{12 \cdot 15}{18} = 660 : 220; \text{ откуда } x_2 = \frac{12 \cdot 15 \cdot 660}{18 \cdot 220} \text{ дней.}$$

- 3) 18 землек. выроють канаву длин. въ 660 с., шир. 9 с. въ  $\frac{12 \cdot 15 \cdot 660}{18 \cdot 220}$  дн.  
 » » » » » » » » 6 » »  $x$

Вслѣдствіе прямой пропорціональности будемъ имѣть:

$$x : \frac{12 \cdot 15 \cdot 660}{18 \cdot 220} = 6 : 9; \text{ откуда } x = \frac{4}{18} \cdot \frac{5}{220} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1} = 20 \text{ дней.}$$

Тотъ же результатъ мы получили бы, если бы нашли искомое значеніе величины, какъ произведеніе извѣстнаго значенія этой величины на отношенія измѣняющихся величинъ. Дѣйствительно:

15 земл. — 220 с. — 9 с. — 12 дн.				
18 » 660 » 6 » $x$ »				
↓				
обратная				
по отношенію къ числу дней.				

$$x = 12 \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{5}{220} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1} = 20 \text{ днй.}$$

### УПРАЖНЕНІЯ.

ОТВѢТЫ:

Рѣшить слѣдующія задачи способомъ приведенія къ единицѣ и потомъ сложнымъ тройнымъ правиломъ:

1) За освѣщеніе зданія 12-ю электрическими лампами, горѣвшими въ теченіе 30-ти вечеровъ по 8½ часовъ ежедневно, заплачено 187 рублей. Сколько стоило бы освѣщеніе этого зданія 22-мя такими же электрическими лампами въ теченіе 45-ти вечеровъ и по 6 час. ежедневно?

363 руб.

2) 8 ткачей, работая ежедневно 11 часовъ, въ 32 дня соткали 96 аршинъ полотна, шириною въ 1 арш. 6 верш. Сколько такихъ же ткачей, работая ежедневно по 8 часовъ, въ 15 дней соткутъ 120 аршинъ полотна, шириною въ 1½ аршина?

32 ткача.



## § 49. Задачи на проценты.

Подъ словомъ «процентъ» вообще подразумѣвается *сотая часть* всякаго числа. Если какое-либо число раздѣлить на 100 частей, то одна такая часть его составитъ 1 процентъ,  $\frac{5}{100}$  — 5 процентовъ,  $\frac{23}{100}$  — 23 процента и т. д.

Когда говорятъ, что въ такомъ-то городѣ, напримѣръ, число женщинъ составляетъ 55 процентовъ всего населенія, то это значить, что если число всѣхъ жителей этого города раздѣлить на 100 частей, то число женщинъ будетъ равно 55-ти такимъ сотымъ частямъ, или если все населеніе города разбить на сотни, то на каждую сотню придется 55 человѣкъ женщинъ. Такимъ образомъ, чтобы опредѣлить отношеніе числа женщинъ къ числу всѣхъ жителей, вполне достаточно узнать отношеніе числа женщинъ къ каждой сотнѣ жителей, ибо, зная, какъ женщины распределены въ каждой сотнѣ населенія, легко представить себѣ и распределеніе ихъ въ общемъ числѣ жителей. Если, напримѣръ, въ какомъ-либо государствѣ грамотныхъ людей 80 процентовъ, то это значить, что число грамотныхъ людей въ этомъ государствѣ составляетъ  $\frac{80}{100}$  частей всего населенія, или что на каждые 100 человѣкъ населенія приходится 80 человѣкъ грамотныхъ. Также и въ этомъ примѣрѣ, опредѣливъ отношеніе числа грамотныхъ къ каждой сотнѣ населенія, мы этимъ самымъ получаемъ представленіе и о томъ, въ какомъ отношеніи находится число всѣхъ грамотныхъ ко всему населенію. Такое отношеніе одного числа къ каждымъ ста единицамъ другого называется *процентнымъ отношеніемъ*.

Но главнымъ образомъ съ процентами приходится имѣть дѣло въ торговомъ оборотѣ и вообще въ разнаго рода коммерческихъ вопросахъ при опредѣленіи прибыли и убытка.

Купецъ, напримѣръ, израсходовалъ 300 рублей на покупку товара, а выручилъ отъ этой продажи 500 рублей; онъ, значить, сверхъ затраченной имъ суммы выручилъ 200 рублей, которые и будутъ прибылью купца. Какъ намъ теперь узнать, въ какомъ *отношеніи* находится прибыль къ затраченной суммѣ? Мы могли бы для этого просто раздѣлить 200 на 300; знаменатель отношенія 200 и 300 равенъ  $\frac{2}{3}$ , и мы сказали бы, что прибыль составляетъ  $\frac{2}{3}$  части затраченной суммы. Но въ торговомъ оборотѣ принято опредѣлять не какое бы то ни было отношеніе прибыли къ затраченной суммѣ, а именно *процентное отношеніе ихъ*, т.-е. *затраченную сумму разбиваютъ на сотни и узнаютъ, сколько прибыли приходится на каждую затраченную сотню*.

Такъ, если купецъ, затративъ 800 рублей, получилъ 200 рублей прибыли, то, разбивъ затраченную сумму на сотни, т.-е. на 8 сотенъ, мы узнаемъ, что на каждую сотню онъ получилъ  $\frac{200}{8} = 25$  рублей прибыли, и говоримъ, что онъ получилъ 25 процентовъ прибыли. Если бы купецъ, затративъ 800 рублей, понесъ потомъ 200 рублей убытку, то мы сказали бы, что онъ понесъ 25 процентовъ убытку. Пусть еще, напримѣръ, нѣкто помѣстилъ капиталъ въ 3000 рублей въ банкъ, который ему платитъ ежегодно 180 руб. Такъ какъ 3000 состоятъ изъ 30-ти сотенъ, то каждая сотня приноситъ ему въ годъ  $\frac{180}{30} = 6$  рублей прибыли, или 6 процентовъ прибыли.



Изъ этихъ примѣровъ, стало-быть, видно, что, при опредѣленіи прибыли и убытка съ какого-либо капитала, *мѣрой* прибыли и убытка является то количество ихъ, которое приходится на каждую сотню рублей или на каждая сто копеекъ; мѣра эта въ торговомъ оборотѣ и называется процентомъ. Купецъ получилъ 40 процентовъ прибыли, — это значить, что онъ получилъ на каждую сотню рублей 40 рублей, или на каждая сто копеекъ, т.-е. на каждый рубль, 40 копеекъ. Банкъ платитъ въ годъ 6 процентовъ, — это значить, что каждые сто рублей, помѣщенные въ банкъ, въ теченіе года приносятъ 6 рублей дохода, или что каждый рубль приноситъ 6 копеекъ дохода.;

Поговоримъ теперь о тѣхъ коммерческихъ вопросахъ, гдѣ приходится имѣть дѣло съ процентами.

Процентами измѣряется та прибыль или тотъ убытокъ, которые торговцы получаютъ при продажѣ своихъ товаровъ. Примѣры мы уже видѣли выше.

Процентами измѣряется еще и та плата, которую лицо, занимающее деньги, должно платить лицу, давшему займы. *Должникъ*, иначе говоря, долженъ ежегодно или ежемѣсячно уплачивать *заимодавцу* (заимодавецъ иначе еще называется *кредиторомъ*) установленные соглашеніемъ проценты; Такъ, если нѣкто занялъ 600 рублей на 3 года по 12 процентовъ, то это значить, что онъ долженъ своему кредитору ежегодно уплачивать по 12 рублей съ каждой занятой сотни; съ 6-ти сотенъ это составитъ  $12 \times 6 = 72$  рубля въ одинъ годъ, и  $72 \times 3 = 216$  рублей въ 3 года.

Процентами измѣряется также и та плата, которую банкъ платитъ лицамъ, помѣстившимъ въ него свои капиталы. Если кто-нибудь обладаетъ свободнымъ капиталомъ, то онъ помѣщаетъ его въ банкъ, который, какъ и должникъ кредитору, платитъ своимъ вкладчикамъ за пользованіе ихъ капиталами извѣстные проценты въ годъ. Если банкъ платитъ, на примѣръ, 4 процента, то это значить, что за каждые 100 рублей банкъ въ годъ платитъ 4 рубля и за каждая 100 копеекъ (или рубль)—4 коп.

Когда капиталъ помѣщенъ въ банкъ или данъ въ долгъ какому-нибудь лицу, — вообще, когда капиталъ приноситъ извѣстный доходъ, говорятъ, что онъ *отданъ въ ростъ*. Капиталъ, отданный въ ростъ, обыкновенно называется *начальнымъ капиталомъ*; проценты иначе принято называть *процентной таксой*, а доходъ со всего капитала въ теченіе любого времени называется *процентными деньгами*. Начальный капиталъ вмѣстѣ съ полученными съ него процентными деньгами получаетъ названіе *наращеннаго капитала*. Такъ, 3000 руб., отданные въ ростъ на 1 годъ по 6 процентовъ, приносятъ 180 рублей доходу; 3000 рублей—это начальный капиталъ, 6 процентовъ—это процентная такса, 180 руб. — это процентныя деньги, а 3000 руб. + 180 руб. = 3180 рублей—это наращенный капиталъ.

На письмѣ процентная такса изображается знакомъ %, который ставится справа отъ числа: 5 процентовъ обозначается такъ: 5%; 9 процентовъ—9%;  $10\frac{1}{2}$  процентовъ— $10\frac{1}{2}\%$  и т. д.; при чемъ процентная такса, или проценты, предполагаетъ 12-ти мѣсячный срокъ оборота, если въ данномъ



вопросъ срокъ играетъ роль, т.-е. 9% обозначаетъ, что каждая сотня приносить 9 руб. прибыли или убытку въ теченіе года.

Задачи на проценты бываютъ преимущественно коммерческаго характера; въ нихъ приходится имѣть дѣло съ слѣдующими величинами: съ начальнымъ или наращеннымъ капиталомъ, съ процентными деньгами и процентной таксой и, наконецъ, съ временемъ, на которое капиталъ отданъ въ ростъ или въ теченіе котораго онъ находился въ обращеніи.

Посмотримъ прежде всего, въ какой зависимости находятся всѣ эти величины другъ отъ друга, и, чтобы нагляднѣе изобразить эту зависимость, возьмемъ слѣдующій примѣръ:

Капиталъ въ 100 рублей, отданный въ ростъ по 6%, приноситъ, понятно, въ годъ 6 рублей процентныхъ денегъ. Если бѣ отдать въ ростъ по столько же процентовъ 200 рублей, то они принесли бы тѣ же 6 рублей въ полгода.

Для еще большей наглядности изобразимъ эту зависимость такъ:

100 руб., отд. по 6%, прин. 6 руб. въ 1 годъ;

200 руб. » » 6%, » 6 руб. »  $\frac{1}{2}$  года;

т.-е. если бѣ увеличить капиталъ въ 2 раза, то, чтобы получить тѣ же процентныя деньги съ него при той же процентной таксѣ, время пришлось бы уменьшить въ 2 раза.

Чтобы, наоборотъ, получить 6 рублей процентныхъ денегъ при 6-ти процентной таксѣ въ 2 года, нужно было бы отдать въ ростъ не 100 руб., а 50 руб.:

въ 1 годъ при 6% прин. 6 руб. капит. въ 100 руб.;

въ 2 года » 6% » 6 руб. » » 50 руб.;

т.-е., если бы увеличить время въ 2 раза, капиталъ, при той же процентной таксѣ и тѣхъ же процентныхъ деньгахъ, слѣдовало бы уменьшить въ 2 раза.

Итакъ, начальный капиталъ и время, на которое онъ отданъ въ ростъ, обратно пропорціональны другъ другу, ибо, чѣмъ капиталъ больше, тѣмъ времени требуется меньше, и чѣмъ капиталъ меньше, тѣмъ времени требуется больше, чтобы при одной и той же процентной таксѣ онъ принесъ одну и ту же прибыль.

Если 100 рублей, отданные по 6%, въ 1 годъ даютъ 6 руб. дохода, то въ то же время и столько же процентныхъ денегъ дадутъ 200 руб., отданные по 3%:

со 100 руб. въ 1 годъ получ. 6 руб. при 6%;

съ 200 руб. » 1 годъ » 6 руб. » 3%;

т.-е., чѣмъ больше капиталъ, тѣмъ по меньшей таксѣ долженъ быть онъ отданъ въ ростъ, чтобы въ то же время принести ту же прибыль. Наоборотъ, чтобы получить 6 руб. дохода въ 1 годъ при 12%, нужно отдать въ ростъ 50 руб.:

при 6% въ 1 годъ получ. 6 руб. со 100 руб.;

» 12% » 1 годъ » 6 руб. » 50 руб.;

т.-е., чѣмъ больше процентная такса, тѣмъ меньшимъ долженъ быть капиталъ, чтобы онъ въ то же время принесъ ту же прибыль.



*Капиталь и процентная такса, слѣдовательно, также обратно пропорціональны другъ другу.*

Далѣе, 100 рублей, отданные въ ростъ по 3%, принесутъ тотъ же доходъ въ 2 года, какой они приносятъ въ 1 годъ, отданные по 6%:

въ 1 годъ со 100 руб. получ. 6 руб. при 6%;

» 2 года » 100 руб. » 6 руб. » 3%;

т.-е. чѣмъ больше процентная такса, тѣмъ меньше времени, и чѣмъ меньше процентная такса, тѣмъ больше времени долженъ находится въ оборотѣ одинъ и тотъ же капиталъ, чтобы съ него получился тотъ же доходъ.

*Процентная такса и время, на которое капиталъ отданъ въ ростъ, также обратно пропорціональны другъ другу.*

100 рублей, отданные по 6%, въ теченіе года принесутъ 6 руб. доходу, а тѣ же 100 руб., отданные по 12%, принесутъ 12 руб. въ 1 годъ:

со 100 руб. въ 1 годъ при 6% получ. 6 руб.;

» 100 руб. » 1 годъ » 12% » 12 руб.;

т.-е. процентныя деньги находятся въ прямо пропорціональной зависимости отъ процентной таксы.

100 рублей, отданные по 6%, въ 1 годъ приносятъ 6 руб. процентныхъ денегъ, а въ 2 года они принесутъ въ 2 раза больше, т.-е. 12 рублей:

со 100 руб. въ 1 годъ при 6% получ. 6 руб.;

» 100 руб. » 2 года » 6% » 12 руб.;

т.-е. процентныя деньги находятся въ прямо пропорціональной зависимости и отъ времени, на которое капиталъ отданъ въ ростъ.

Наконецъ, процентныя деньги со 100 руб. при одной процентной таксѣ и за одно и то же время въ 2 раза меньше процентныхъ денегъ съ 200 руб. и въ 2 раза больше процентныхъ денегъ съ 50 рублей:

со 100 руб. въ 1 годъ при 6% получ. 6 руб.;

съ 200 руб. » 1 годъ » 6% » 12 руб.; и

со 100 руб. въ 1 годъ при 6% получ. 6 руб.;

съ 50 руб. » 1 годъ » 6% » 3 руб.;

т.-е. процентныя деньги находятся въ прямо пропорціональной зависимости отъ начального капитала.

Намъ осталось еще разсмотрѣть зависимость наращеннаго капитала отъ остальныхъ величинъ. Черезъ 1 годъ 100 рублей, отданные въ ростъ по 6%, принесутъ 6 рублей процентныхъ денегъ, и вмѣсто 100 рублей получится уже 106 рублей. Черезъ 2 года со 100 рублей получится два раза по 6 рублей процентныхъ денегъ, и вмѣсто 100 рублей мы уже получаемъ 112 рублей. Изобразимъ это въ такомъ видѣ:

100 руб., отд. по 6%, въ 1 годъ прин. 6 руб. и обращ. въ 106 р.;

100 » » » 6% » 2 года » 12 » » » 112 р.

Итакъ, увеличивъ время въ 2 раза, мы только увеличили процентныя деньги въ 2 раза, но отъ этого наращенный капиталъ увеличился не въ 2 раза тоже, а на 6 рублей (112 руб.—106 руб.); это значить, что наращенный капиталъ не пропорціоналенъ времени роста.



Со 100 руб. въ теченіе года получается 6 руб. процентныхъ денегъ при 6%; со 100 руб. въ теченіе года при 3% получится 3 руб. процентныхъ денегъ; въ первомъ случаѣ наращенный капиталъ будетъ, понятно, *тоб руб.*, а во второмъ — *тоз руб.*:

100 руб., отд. по 6%, въ 1 годъ прин. 6 руб. и обращ. въ 106 р.;

100 » » » 3% » 1 » » 3 » » » » 103 р.;

т.-е., уменьшивъ процентную таксу въ 2 раза, мы въ 2 раза уменьшили процентныя деньги, но отъ этого наращенный капиталъ *уменьшился* не въ 2 раза, а только на 3 руб. (106 руб.—103 руб.); *наращенный капиталъ не пропорціоналенъ процентамъ.*

Нетрудно догадаться, что *наращенный капиталъ не пропорціоналенъ и процентнымъ деньгамъ*, ибо съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ процентныхъ денегъ въ нѣсколько разъ наращенный капиталъ увеличится или уменьшится не во столько же разъ, а лишь на столько, на сколько приросли или убыли процентныя деньги.

Во всякой задачѣ на проценты даются тѣ или другія изъ этихъ величинъ и требуется опредѣлить какую-нибудь изъ нихъ. Такъ, могутъ быть даны: начальный капиталъ, процентная такса и время его обращенія, а требуется опредѣлить полученныя съ него процентныя деньги; дается иногда процентная такса, время обращенія капитала и полученныя съ него процентныя деньги, а требуется опредѣлить начальный капиталъ и т. д. Задачи эти рѣшаются и способомъ приведенія къ единицѣ и,—такъ какъ величины, входящія въ нихъ, прямо или обратно пропорціональны другъ другу,—способомъ тройного правила.

Посмотримъ теперь, *какъ рѣшаются задачи на проценты.*

**Задача 1.** *Капиталъ въ 3600 рублей отданъ въ ростъ по  $4\frac{1}{2}\%$  на 4 года. Сколько процентныхъ денегъ получится съ него за это время?*

Рѣшимъ эту задачу, исходя изъ того, что 1% есть  $\frac{1}{100}$  часть капитала. Если бы капиталъ былъ отданъ въ ростъ по 1%, то прибыль въ годъ составляла бы  $\frac{1}{100}$  капитала. Но такъ какъ капиталъ былъ отданъ по  $4\frac{1}{2}\%$ , то прибыль въ годъ составляла  $\frac{1}{100} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{200}$  капитала. Прибыль же за 4 года составляла  $\frac{9}{200} \cdot 4 = \frac{9}{50}$  капитала. Такъ какъ капиталъ равенъ 3600 руб., то прибыль съ этого капитала равна 3600 руб.  $\times \frac{9}{50} = 648$  руб.

Рѣшимъ эту задачу способомъ *приведенія къ единицѣ.*

Каждые 100 рублей, отданные по  $4\frac{1}{2}\%$ , въ теченіе 1 года принесутъ  $4\frac{1}{2}$  рубля доходу; 100 рублей въ теченіе 4-хъ лѣтъ принесутъ доходу въ 4 раза больше, т.-е.  $4\frac{1}{2}$  руб.  $\times 4 = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18$  рублей; а 3600 рублей, или 36 сотенъ, принесутъ дохода въ 36 разъ больше, т.-е. 18 руб.  $\times 36 = 648$  рублей.

Рѣшивъ задачу такимъ образомъ, мы привели къ единицѣ только время. Можно было бы, однако, привести къ единицѣ и капиталъ: 1 рубль въ 1 годъ даетъ  $4\frac{1}{2}$  коп. доходу; 1 рубль въ 4 года дастъ доходу въ 4 раза больше, т.-е.  $4\frac{1}{2}$  коп.  $\times 4 = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18$  коп., а 3600 руб. дадутъ доходу въ 3600 разъ больше, т.-е. 18 коп.  $\times 3600 = 64800$  коп., или 648 руб.



Для большаго удобства рѣшеніе располагаемъ такъ:

1 рубль въ 1 годъ приноситъ  $4\frac{1}{2}$  коп.

$$1 \quad \gg \quad \gg \quad 4 \text{ года} \quad \gg \quad 4\frac{1}{2} \quad \gg \quad \times 4 = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18 \text{ коп.}$$

$$3600 \text{ руб.} \quad \gg \quad 4 \quad \gg \text{ приносятъ } 18 \quad \gg \times 3600 = 648 \text{ руб.}$$

А теперь посмотримъ, какъ задача эта рѣшается посредствомъ *трой-ного правила*.

Въ этой задачѣ требуется узнать, сколько процентныхъ денегъ получится съ 3600 руб. въ 4 года, если со 100 руб. въ 1 годъ получается  $4\frac{1}{2}$  рубля ( $4\frac{1}{2}\%$  показываютъ, что со 100 руб. въ годъ получается  $4\frac{1}{2}$  рубля). Выпишемъ всю задачу въ двѣ строки, обозначивъ искомыя процентныя деньги черезъ  $x$ :

$4\frac{1}{2}$  рубля доходу приносятъ въ 1 годъ 100 рублей

$x$  рублей  $\gg$  принесутъ  $\gg$  4 года 3600  $\gg$

Теперь задача рѣшается, какъ всѣ задачи на сложное тройное правило.

$$x = 4\frac{1}{2} \text{ руб.} \times \frac{4}{1} \times \frac{3600}{100} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{1} \times \frac{3600}{100} = 648 \text{ рублей.}$$

Время и капиталъ, какъ извѣстно, прямо пропорціональны доходу. Поэтому, по правилу, выведенному въ отдѣлѣ рѣшенія задачъ сложнымъ тройнымъ правиломъ, опредѣляемое значеніе величины равно извѣстному значенію этой величины ( $4\frac{1}{2}$ ), умноженному на произведеніе отношеній значеній величинъ второй строки къ первой (на  $\frac{4}{1} \cdot \frac{3600}{100}$ ).

Эту задачу можно было бы рѣшить и посредствомъ пропорцій.

Наподобіе этой рѣшаются всѣ тѣ задачи, въ которыхъ дается началь-ный капиталъ, процентная такса и время, которое капиталъ находился въ ростѣ, и въ которыхъ требуется опредѣлить процентныя деньги. Это—*первая группа* задачъ на проценты.

Можетъ случиться, что по даннымъ величинамъ какая-нибудь задача подходитъ къ этой первой группѣ задачъ на проценты, но требуется въ ней опредѣлить не процентныя деньги, а *наращенный капиталъ*, т.-е. бываютъ задачи, въ которыхъ дается и начальный капиталъ, и процентная такса, и время, а требуется опредѣлить наращенный капиталъ. Но такъ какъ наращенный капиталъ, какъ мы видѣли, не пропорціоналенъ ни времени, ни процентной таксѣ, ни начальному капиталу при разномъ времени, то въ такомъ случаѣ нельзя было бы сразу же рѣшать задачу тройнымъ правиломъ. Въ такихъ случаяхъ сначала опредѣляются процентныя деньги, такимъ же образомъ, какъ мы указали въ задачѣ 1-й, и потомъ эти процентныя деньги прибавляются къ начальному капиталу. Такъ, если бы требовалось опредѣлить въ задачѣ 1-й наращенный капиталъ, то, найдя процентныя деньги (648 руб.), мы ихъ должны были бы прибавить къ начальному капиталу (3600 руб.), отъ чего получилось бы: 3600 руб. + 648 руб. = 4248 рублей; это означало бы, что 3600 рублей, отданные въ ростъ по  $4\frac{1}{2}\%$ , черезъ 4 года обратились бы въ 4248 рублей.

*Чтобы опредѣлить процентныя деньги, достаточно знать начальный капиталъ, процентную таксу и время, и нужно процентную таксу умножить*



на время (выраженное въ частяхъ года или цѣлымъ числомъ лѣтъ) и еще на начальный капиталъ, и полученное произведение раздѣлить на 100.

Руководствуясь этимъ правиломъ, весьма легко рѣшать задачи первой группы. При этомъ слѣдуетъ замѣтить еще, что во всѣхъ такихъ задачахъ для большей простоты вычисленій принято вездѣ, гдѣ не [указано года и названія мѣсяца, считать въ году 360 дней и въ мѣсяцѣ 30 дней; кромѣ того, чтобы пользоваться выведеннымъ правиломъ, слѣдуетъ время выражать всегда и вездѣ въ частяхъ года.

### УПРАЖНЕНІЯ \*).

Отвѣты:

1) Сколько процентныхъ денегъ получится съ 25000 руб., отданныхъ въ ростъ по  $5\frac{1}{2}\%$  на  $2\frac{1}{2}$  года?

3437 $\frac{1}{2}$  руб.

2) Нѣкто помѣстилъ въ банкъ 360 рублей по 4% на 10 лѣтъ. Сколько денегъ онъ получить изъ банка по истеченіи этого срока?

504 руб.

3) Нѣкто занялъ 480 рублей по 8% срокомъ на 1 годъ 3 мѣсяца и 21 день. Сколько всего денегъ онъ долженъ будетъ уплатить своему кредитору въ назначенный срокъ?

530 руб. 24 коп.

Указаніе. 3 мѣсяца и 21 день гораздо удобнѣе выразить въ частяхъ года: 21 день есть  $\frac{7}{12}$  часть мѣсяца или

$$\frac{21}{30 \cdot 12} = \frac{7}{10 \cdot 12} = \frac{7}{120}$$

частей года; 3 мѣсяца —  $\frac{3}{12}$  части года;

$$\frac{3}{12} + \frac{7}{120} = \frac{30+7}{120} = \frac{37}{120}$$

года; весь срокъ, такимъ образомъ, равенъ  $1\frac{37}{120}$  года. Теперь уже задача рѣшается по общему правилу.

(Рѣшить всѣ эти задачи способомъ приведенія къ единицѣ и тройнымъ правиломъ и замѣной процентовъ частью капитала).

**Задача 2.** Капиталъ въ 3600 рублей, отданный въ ростъ на 4 года, принесъ 648 рублей процентныхъ денегъ. По сколько процентовъ былъ онъ отданъ въ ростъ?

Опредѣлимъ, какую часть капитала составляетъ прибыль за 4 года:  $648 : 3600 = \frac{648}{3600} = \frac{9}{50}$ . Теперь опредѣляемъ, какую часть капитала составляетъ прибыль за 1 годъ:  $\frac{9}{50} : 4 = \frac{9}{200}$ . Теперь, исходя изъ того, что 1% есть  $\frac{1}{100}$  капитала, опредѣляемъ, сколько % составляетъ,  $\frac{9}{200}$  капитала, т.-е.  $\frac{9}{200} : \frac{1}{100} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\%$ .

\*) Въ упражненіяхъ нами не даны рѣшенія, а только отвѣты, такъ какъ они рѣшаются наподобіе уже рассмотрѣнныхъ задачъ.



Теперь рѣшимъ эту задачу способомъ *приведенія къ единицѣ*.

Узнать, по скольку процентовъ отданъ капиталъ въ ростъ, — значить узнать, сколько рублей дохода приносятъ 100 рублей въ 1 годъ или сколько копеекъ приносить 1 рубль въ годъ. Если 3600 руб. приносятъ въ 4 года 648 рублей, то тѣ же 3600 руб. въ 1 годъ приносятъ въ 4 раза меньше дохода, т.-е.  $\frac{648}{4} = 162$  руб., а такъ какъ въ 3600-хъ 36 сотень, то каждая сотня въ 1 годъ приносить: 162 руб.: 36 =  $4\frac{1}{2}$  рубля, и капиталъ, значить, былъ отданъ въ ростъ по  $4\frac{1}{2}\%$ . Можно рѣшить задачу и такъ:

3600 руб. въ 4 года принос. 648 руб. проц. денегъ

1 » » 4 » »  $\frac{648}{3600}$  » » »

1 » » 1 » »  $\frac{648}{3600 \cdot 4} = \frac{9}{200}$  руб. проц. ден.

100 » » 1 » »  $\frac{9 \cdot 100}{200} = 4\frac{1}{2}$  рубля, или  $4\frac{1}{2}\%$ .

Рѣшимъ ее теперь *тройнымъ правиломъ*:

648 руб. проц. ден. принос. въ 4 года капит. въ 3600 руб.

x » » » » » 1 годъ » » 100 »

$$x = 648 \text{ руб.} \times \frac{1}{4} \times \frac{100}{3600} = \frac{648 \cdot 1 \cdot 100}{4 \cdot 3600} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\%.$$

Доходъ, какъ извѣстно, прямо пропорціоналенъ времени и капиталу. Поэтому доходъ, получаемый со ста рублей въ теченіе года, равенъ 648, умноженнымъ на произведеніе отношеній чиселъ столбцовъ нижней строки къ соотвѣствующимъ числамъ столбцовъ верхней строки, т.-е. на  $\frac{1}{4} \cdot \frac{100}{3600}$ ; получимъ, что  $x = 4\frac{1}{2}$ , т.-е. со 100 рублей въ 1 годъ получается  $4\frac{1}{2}$  рубля (или съ 1 рубля —  $4\frac{1}{2}$  коп.), что означаетъ, что капиталъ отданъ былъ въ ростъ по  $4\frac{1}{2}\%$ .

Можно было бы рѣшить эту задачу и посредствомъ пропорцій.

Наподобіе этой второй задачи рѣшаются всѣ тѣ, въ которыхъ дается начальный капиталъ, время и процентныя деньги и требуется опредѣлить процентную таксу. Это — *вторая группа* задачъ на проценты.

Встрѣчаются задачи, въ которыхъ дается и время, и начальный капиталъ, въ которыхъ требуется также опредѣлить процентную таксу, но въ которыхъ вмѣсто процентныхъ денегъ дается *наращенный капиталъ*. Такъ какъ процентная такса не пропорціональна наращенному капиталу, и искомая величина не отъ всѣхъ величинъ задачи будетъ, слѣдовательно, въ пропорціональной зависимости, то такія задачи нельзя прямо рѣшать тройнымъ правиломъ. Въ такихъ случаяхъ предварительно изъ наращеннаго капитала вычитаютъ начальный; отъ этого, конечно, получатся процентныя деньги, и вся задача приметъ такой же видъ, какъ и задача 2-я. Если бы, напримѣръ, задача 2-я имѣла такой видъ: «3600 рублей черезъ 4 года обратятся въ 4248 рублей; по скольку процентовъ они отданы были въ ростъ?», то прежде всего слѣдовало бы изъ 4248 вычесть 3600 и затѣмъ уже рѣшать ее, какъ мы ее рѣшили, либо способомъ приведенія къ единицѣ, либо тройнымъ правиломъ.



Такъ какъ для опредѣленія процентной таксы мы процентныя деньги за все время, которое капиталъ находился въ ростѣ, раздѣлили на число лѣтъ ( $648 \text{ руб.} \times \frac{1}{4}$ ; это то же самое, что  $\frac{648}{4}$ ), затѣмъ полученное число раздѣлили еще на число рублей начального капитала ( $\frac{648}{4 \cdot 3600}$ ) и, наконецъ, все это умножили на 100 ( $\frac{648 \cdot 100}{4 \cdot 3600}$ ), то, на основаніи этого, мы можемъ вывести такое правило:

*Чтобы опредѣлить процентную таксу, достаточно знать начальный капиталъ, время и процентныя деньги, и нужно процентныя деньги раздѣлить на время (выраженное въ частяхъ года) и еще на начальный капиталъ— и полученное частное умножить на 100.*

Руководствуясь этимъ правиломъ, можно легко и быстро рѣшить любую задачу второй группы.

### УПРАЖНЕНІЯ.

ОТВѢТЫ:

1) Нѣкто занялъ 800 рублей съ условіемъ черезъ 9 мѣсяцевъ уплатить сверхъ долга еще 25 рублей. По скольку процентовъ былъ сдѣланъ заемъ?

$4\frac{1}{8}\%$ .

*Указаніе.* 9 мѣсяцевъ составляютъ  $\frac{3}{4}$  года.

2) Капиталъ въ 6500 рублей, будучи отданъ въ ростъ, черезъ  $2\frac{1}{3}$  года обратился въ 7410 рублей. По скольку процентовъ былъ онъ отданъ въ ростъ?

$6\%$ .

**Задача 3.** Капиталъ въ 3600 рублей, отданный въ ростъ по  $4\frac{1}{2}\%$ , черезъ нѣкоторое время принесъ 648 рублей процентныхъ денегъ. Сколько времени капиталъ этотъ находился въ ростѣ?

Первый способъ рѣшенія: такъ какъ  $4\frac{1}{2}\% = \frac{9}{200}$  коп., то въ 1 годъ получится  $3600 \cdot \frac{9}{200} = 162$  руб. прибыли; 648 руб. прибыли получится въ срокъ:  $648 : 162 = 4$  (года).

Каждые 100 рублей въ 1 годъ приносятъ  $4\frac{1}{2}$  руб. процентныхъ денегъ; съ 36 сотенъ рублей, слѣдовательно, въ 1 годъ получится  $4\frac{1}{2}$  руб.  $\times 36 = \frac{9 \cdot 36}{2} = 162$  рубля; а 648 рублей процентныхъ денегъ получится съ 3600 рублей въ теченіе времени, во столько разъ большаго одного года, во сколько разъ 648 больше 162-хъ, т.-е. въ  $\frac{648}{162} = 4$  года.

Можно было бы рѣшить задачу и такъ:

$4\frac{1}{2}$  рубля получ. со 100 руб. въ 1 годъ;

1 рубль » » 100 » » 1 годъ :  $4\frac{1}{2} = 1 : \frac{9}{2} = \frac{2}{9}$  года;

1 » » съ 3600 » »  $\frac{2}{9}$  года :  $36 = \frac{2}{9 \cdot 36}$  года;

648 рублей » » 3600 » »  $\frac{2}{9 \cdot 36}$  года  $\times 648 = \frac{2 \cdot 648}{9 \cdot 36} = 4$  года.

Это—рѣшеніе способомъ приведенія къ единицъ.



Теперь рѣшимъ эту задачу третьимъ способомъ — способомъ *тройного правила*:

въ 1 годъ со 100 руб. получ.  $4\frac{1}{2}$  руб. проц. денегъ  
 въ x лѣтъ съ 3600 » » 648 » » »

$$x = 1 \text{ годъ} \times \frac{100}{3600} \times \frac{648 \cdot 2}{9} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 648 \cdot 2}{3600 \cdot 9} = 4 \text{ года.}$$

Время, знаемъ мы, обратно пропорціоально капиталу; но оно прямо пропорціоально процентнымъ деньгамъ. Поэтому, согласно способу, изложенному въ отдѣлѣ сложнаго тройнаго правила, чтобы получить опредѣляемую величину, надо 1 годъ помножить на произведеніе отношеній  $\frac{100}{3600} \times \frac{648 \cdot 2}{9}$ . Впрочемъ, это видно и изъ слѣдующихъ разсужденій: x должно быть во столько разъ меньше одного года, во сколько разъ 3600 больше 100, и 1 годъ нужно умножить на отношеніе 100 къ 3600, т.-е. на  $\frac{100}{3600}$ . Время прямо пропорціоально процентнымъ деньгамъ; слѣдовательно, x должно уже стать во столько разъ больше прежняго, во сколько разъ 648 больше  $4\frac{1}{2}$ , и  $\frac{100}{3600}$  года нужно умножить еще на отношеніе 648-ми къ  $4\frac{1}{2}$ , т.-е. на  $\frac{648 \cdot 2}{9}$ . Перемноживъ эти числа по правилу умноженія дробей и сокративъ числителей и знаменателей, получимъ, что  $x = 4$ , т.-е. что 648 рублей процентныхъ денегъ получится съ 3600 рублей въ 4 года.

Задачи, подобныя 3-й, въ которыхъ дается начальный капиталъ, процентная такса и процентныя деньги и требуется опредѣлить время, — представляютъ *третью группу* задачъ на проценты.

И въ задачахъ 3-й группы иногда, вмѣсто процентныхъ денегъ, дается *наращенный капиталъ*. Но такъ какъ время не пропорціоально наращенному капиталу, то искомая величина была бы тогда въ пропорціоальной зависимости не отъ всѣхъ данныхъ величинъ, и такую задачу, поэтому, рѣшать прямо тройнымъ правиломъ нельзя. Въ такихъ случаяхъ предварительно слѣдуетъ опредѣлить процентныя деньги, вычтя начальный капиталъ изъ наращеннаго; затѣмъ уже поступаютъ такъ, какъ показано въ задачѣ 3-й. Если бъ въ задачѣ 3-й, вмѣсто процентныхъ денегъ, данъ былъ наращенный капиталъ, т.-е. если бъ дано было, что 3600 рублей, отданные по  $4\frac{1}{2}\%$ , черезъ нѣкоторое время обратились въ 4248 рублей (3600 руб. + 648 руб.), то, чтобы опредѣлить время, слѣдовало бы сначала изъ 4248 вычесть 3600 и затѣмъ уже рѣшить ее тройнымъ правиломъ.

Такъ какъ въ задачѣ 3-й время, въ теченіе котораго капиталъ находился въ ростѣ, мы опредѣлили, умноживъ 1 годъ на отношеніе 100 руб. къ данному капиталу (на  $\frac{100}{3600}$ ) и на отношеніе процентныхъ денегъ за искомое время къ процентнымъ деньгамъ со 100 руб. за 1 годъ ( $648 : 4\frac{1}{2} = \frac{648 \cdot 2}{9}$ ), то, на основаніи всего этого, мы можемъ вывести такое правило:

*Чтобы опредѣлить время роста капитала, достаточно знать начальный капиталъ, процентную таксу и процентныя деньги, и нужно процентныя деньги за искомое время раздѣлить на процентныя деньги со 100 руб. (или съ 1 руб.) за 1 годъ, т.-е. на процентную таксу, полученное число раздѣлить еще на начальный капиталъ, и все это умножить на 100.*



## УПРАЖНЕНИЯ.

ОТВѢТЫ:

1) Во сколько времени капиталъ въ 5970 рублей, отданный въ ростъ по  $7\frac{1}{2}\%$ , принесетъ 995 рублей процентныхъ денегъ?

2 $\frac{2}{3}$  года.

2) Во сколько времени капиталъ въ 2300 рублей, отданный въ ростъ по  $5\frac{1}{4}\%$ , обратится въ 2783 рубля?

4 года.

**Задача 4.** Какой капиталъ, будучи отданъ въ ростъ по  $4\frac{1}{2}\%$ , черезъ 4 года принесетъ 648 рублей процентныхъ денегъ?

Такъ какъ  $4\frac{1}{2}\% = \frac{9}{200}$  капитала, то прибыль за 4 года составитъ  $\frac{9}{200} \cdot 4 = \frac{9}{50}$  капитала, т.-е. 648 руб. есть  $\frac{9}{50}$  капитала; слѣдовательно, весь капиталъ будетъ  $648 : \frac{9}{50} = 3600$  руб.

Рѣшимъ задачу способомъ приведенія къ единицѣ.

Каждые сто рублей въ 1 годъ приносятъ  $4\frac{1}{2}$  рубля процентныхъ денегъ, а въ 4 года они принесутъ  $4\frac{1}{2}$  руб.  $\times 4 = 18$  рублей. Очевидно, что 648 рублей принесетъ капиталъ, во столько разъ большій 100 руб., во сколько разъ 648 больше 18-ти, т.-е.  $648 : 18 = 36$  сотенъ, или 3600 руб.

Рѣшеніе можетъ быть еще и такое:

$4\frac{1}{2}$  коп. въ 1 годъ принос. 1 рубль.

64800      »      » 1      »      64800 коп. :  $4\frac{1}{2} = \frac{64800 \cdot 2}{9} = 14400$  р.

64800      »      » 4 года      »      14400 руб. : 4 = 3600 рублей.

Рѣшимъ задачу теперь тройнымъ правиломъ:

100 рублей въ 1 годъ приносятъ  $4\frac{1}{2}$  рублей процентныхъ денегъ

x      »      » 4 года      »      648      »      »      »

$$x = 100 \text{ руб.} \times \frac{1}{4} \times \frac{648 \cdot 2}{9} = \frac{100 \cdot 1 \cdot 648 \cdot 2}{4 \cdot 9} = \frac{7200}{2} = 3600 \text{ рублей.}$$

Капиталъ обратно пропорціоналенъ времени, но прямо пропорціоналенъ процентнымъ деньгамъ; поэтому, на основаніи правилъ сложнаго тройнаго правила,  $x = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{648 \cdot 2}{9}$ . Это, впрочемъ, вытекаетъ изъ слѣдующихъ разсужденій:

Капиталъ обратно пропорціоналенъ времени: если со 100 руб. получаетъ некоторая прибыль въ 1 годъ, то такую же прибыль съ капитала въ x рублей можно получить въ теченіе 4-хъ лѣтъ тогда, когда x будетъ въ 4 раза меньше 100; x, слѣдовательно, равно будетъ тогда  $100 \times \frac{1}{4}$ . Но капиталъ прямо пропорціоналенъ процентнымъ деньгамъ, и потому x уже станетъ больше  $100 \times \frac{1}{4}$  во столько разъ, во сколько разъ 648 больше  $4\frac{1}{2}$ , т.-е. x равенъ  $100 \times \frac{1}{4}$ , умноженнымъ еще на  $\frac{648 \cdot 2}{9}$ . Перемноживъ эти числа и сокративъ ихъ, получимъ, что  $x = 3600$ , т.-е. начальный капиталъ равенъ 3600 рублямъ.

Задачи, подобныя этой 4-й, въ которыхъ дается процентная такса, время роста и процентныя деньги за это время и требуется опредѣлить



начальный капитал,—образуют *четвертую группу* задач на проценты.

Если бы въ такой задачѣ 4-й группы, вмѣсто процентныхъ денегъ, данъ былъ *наращенный капиталъ*, то такую задачу, очевидно, нельзя было бы прямо рѣшать тройнымъ правиломъ, ибо искомая величина (начальный капиталъ) не была бы пропорціональна одной изъ данныхъ величинъ (именно, наращенному капиталу). Рѣшеніе такихъ задачъ составляетъ—*пятый типъ* задачъ на проценты.

Такъ какъ для опредѣленія начального капитала въ задачѣ 4-й мы 100 рублей умножили на отношеніе одного года къ данному числу лѣтъ (къ 4-мъ) и полученное число умножили еще на отношеніе процентныхъ денегъ съ искомага капитала за все время его роста къ процентнымъ деньгамъ со 100 руб. за 1 годъ (на  $648 : 4\frac{1}{2}$ ), то, на основаніи этого, мы можемъ вывести слѣдующее правило:

*Чтобы опредѣлить начальный капиталъ, достаточно знать процентную таксу, процентныя деньги и время роста, и нужно процентныя деньги съ искомага капитала за все время роста раздѣлить на процентныя деньги со 100 руб. (или съ 1 руб.) въ 1 годъ, т.-е. на процентную таксу, полученное число раздѣлить на время роста (выраженное въ частяхъ года), и все это умножить на 100.*

### УПРАЖНЕНІЕ.

Какой капиталъ, отданный въ ростъ по 9,1%, черезъ 10 мѣсяцевъ принесетъ 81,9 рубля процентныхъ денегъ?

Отв. 1080 руб.

Указаніе. 10 мѣсц. =  $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$  года.

**Задача 5.** Какой капиталъ нужно отдать по  $4\frac{1}{2}\%$  на 4 года, чтобы получить *наращенный капиталъ* въ 4248 руб.?

Рѣшимъ эту задачу, исходя изъ того, что 1% есть  $\frac{1}{100}$  капитала. Тогда  $4\frac{1}{2}\% = \frac{9}{200}$  капитала. За 4 года прибыль составитъ  $\frac{9}{200} \cdot 4 = \frac{9}{50}$  капитала. Такъ какъ капиталъ 4248 есть капиталъ наращенный, т.-е. капиталъ вмѣстѣ съ прибылью, то онъ будетъ равенъ  $1 + \frac{9}{50} = 1\frac{9}{50}$  капитала. Откуда 1 капитала будетъ равна:  $4248 : 1\frac{9}{50} = \frac{4248 \cdot 50}{59} = 3600$  руб.

Если бы мы хотѣли рѣшить эту задачу посредствомъ *тройного правила*, то нужно было бы предварительно опредѣлить, во что обратится сотня черезъ 4 года, т.-е. къ сотнѣ прибавить прибыль за 4 года:  $100 + 4\frac{1}{2} \cdot 4 = 118$  руб., и затѣмъ только составить слѣдующее условіе:

100 обращается черезъ 4 года въ 118 руб.

x        »                        »        4        »        » 4248 руб.

---


$$x = 100 \cdot \frac{4248}{118} = 3600 \text{ руб. (прямая пропорціональность).}$$

Обращаемъ особое вниманіе на этотъ типъ задачъ, такъ какъ учащіеся, упуская изъ виду, что *наращенный капиталъ и время не находятся ни въ какой пропорціональной зависимости*, тѣмъ не менѣе часто рѣшаютъ такіа задачи тройнымъ правиломъ.



Къ этому же типу принадлежать задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить первоначальную стоимость товара по продажной цѣнѣ, когда получается *прибыль* или *убытокъ*. Напр.:

*Купецъ продаетъ товаръ по 18 коп. фунтъ, при чемъ получаетъ 20% прибыли. Сколько ему самому стоитъ фунтъ?*

Здѣсь 18 коп. есть капиталъ уже съ прибылью, а 20% купецъ получаетъ не съ этого капитала, а съ капитала, уплаченнаго имъ самимъ за фунтъ товара, т.-е. съ неизвѣстной величины, которую и требуется опредѣлить. Задача эта рѣшается просто, если 20% замѣнить опредѣленной частью капитала:  $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$  капитала. Слѣдовательно, 18 коп. составляютъ  $(1 + \frac{1}{5})$  капитала, т.-е.  $\frac{6}{5}$  капитала, откуда 1 капитала, т.-е. себѣстоимость, будетъ равна  $18 : \frac{6}{5} = 15$  коп. (прибыль 3 коп. и будетъ составлять 20% отъ 15 коп.).

Точно такъ же рѣшается и слѣдующая задача:

*Купецъ, продавая товаръ по 12 коп., получаетъ 20% убытку. Сколько ему самому стоитъ товаръ?*

$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$  стоим. товара. Если стоимость товара равна 1, а убытокъ —  $\frac{1}{5}$  этой стоимости, то продажная цѣна равна  $\frac{4}{5}$  первоначальной стоимости, т.-е. 12 коп. есть  $\frac{4}{5}$  стоимости; отсюда стоимость будетъ равна  $12 : \frac{4}{5} = 15$  коп.

Эту задачу, какъ и предыдущую, можно рѣшить и посредствомъ тройного правила. Если купецъ получаетъ 20% убытку, то это означаетъ, что на каждые 100 коп. онъ получаетъ 20 коп. убытку. Значить, если ему товаръ стоитъ 100 коп., то онъ его продаетъ за 80 коп. Поэтому мы можемъ написать:

товаръ, стоящій ему 100 коп., онъ продаетъ за 80 коп.

»        »        »        x        »        »        »        12        »

$$x : 100 = 12 : 80 \text{ (прямая пропорц.); } x = \frac{12 \cdot 100}{80} = 15 \text{ к.}$$

## У Ч Е Т Ъ В Е К С Е Л Е Й.

### § 50. Коммерческій учетъ.

Дать займы значить предоставить нѣкоторую сумму денегъ во временное пользованіе кому-нибудь. За то, что одно лицо пользуется капиталомъ другого, первое, т.-е. должникъ, долженъ уплатить второму, т.-е. кредитору, въ видѣ вознагражденія извѣстные проценты по соглашенію. Мало того, — кредиторъ долженъ быть еще и обезпеченъ чѣмъ-либо въ томъ, что по истеченіи срока займа долгъ, т.-е. занятый у него капиталъ и процентныя деньги, будетъ ему возвращенъ цѣликомъ. И должникъ выдаетъ еще кредитору письменное обязательство уплатить весь долгъ въ назначенный срокъ. Такое письменное обязательство, написанное на клочкѣ обыкновенной бумаги, называется *распиской*, или *заемнымъ письмомъ*. Но го-



сударство устанавливает для денежных обязательств особые бумаги, на которых изображен государственный герб и которые называются *вексельными бумагами*, или просто *векселями*.

Купив вексель, должник пишет на нем обязательство уплатить долг к установленному сроку и вручает его кредитору: должник, говоря, *выдает вексель* кредитору.

Пусть, например, петроградский купец, которого мы назовем буквой А, занял у петроградского купца Б 1-го сентября 1917 года 3,000 руб. на 5 месяцев по 8%.

Заметим, что процентная такса и в этом случае означает процентные деньги со 100 руб. (или со 100 коп.) в течение одного года; если заем совершается на срок, меньший или больший года, то процентные деньги с занимаемого капитала за все время вычисляются наподобие того, как он вычислялся в задаче 1-й на проценты.

Купец А через 5 месяцев должен будет уплатить своему кредитору занятые 3,000 руб. и процентные деньги: 3,000 руб. да процентные деньги с этого капитала за 5 месяцев. Если купец А занял 3,000 руб. по 8%, то через год он с каждой сотни должен был бы уплатить 8 руб., а через 5 месяцев, конечно, меньше во столько раз, во сколько раз 5 мес. меньше года или 12-ти мес., т.-е.  $8 \text{ р.} \times \frac{5}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ р.}$  Это — со ста рублей; а с 3,000 руб. или с 30-ти сотен — в 30 раз больше, т.-е.  $3\frac{1}{3} \text{ р.} \times 30 = 100 \text{ р.}$

Итак, через 5 месяцев купец А должен будет уплатить купцу Б 3,000 руб. да еще 100 руб., всего 3,100 рублей.

Условившись предварительно относительно процентов и вычислив таким образом процентные деньги за все время займа, купец А выдает купцу Б вексель, который он пишет следующим образом:

*Петроградъ, 1-го сентября 1917 года.*

*Вексель на 3100 рублей.*

*Отъ сего числа черезъ пять мѣсяцевъ по сему векселю повиненъ я заплатить петроградскому купцу Б (имя, отчество и фамилія кредитора) три тысячи сто рублей.*

*Петроградскій купецъ А (имя, отчество и фамилія должника).*

Какъ в этомъ взятомъ нами примѣрѣ, такъ и во всѣхъ подобныхъ случаяхъ на дѣлѣ прежде, чѣмъ писать вексель, должникъ улаживаетъ съ кредиторомъ относительно процентной таксы и затѣмъ вычисляетъ проценты, причитающіеся на занимаемый имъ капиталъ за все время займа, при чемъ годъ принято считать въ 360 дней, а мѣсяць вообще въ 30 дней. Сложивъ занимаемый имъ капиталъ съ причитающимися на него процентными деньгами, должникъ эту сумму и прописываетъ въ векселѣ. Въ векселѣ, значить, не пишутся ни процентные деньги, ни процентная такса, ни отдѣльно занятый капиталъ, а пишется сумма: занятый капиталъ + процентные деньги съ него за все время, на которое онъ занялъ. Сумма, прописываемая въ векселѣ, иначе называется *вексельной суммой*, или *валютой* векселя. И если говорятъ, что выданъ вексель на 3,100 рублей, напримеръ, то это



надо понимать такъ, что занято было меньше, нежели 3,100 рублей, но къ назначенному сроку занятый капиталъ вмѣстѣ съ причитающимися на него за все это время процентами составитъ 3,100 рублей.

Купецъ Б, понятно, не можетъ требовать отъ купца А, чтобы тотъ уплатилъ долгъ ранѣе назначеннаго въ векселѣ срока. Но можетъ случиться, что купцу Б понадобятся наличныя деньги за 2 мѣсяца, наприимѣръ, до наступленія срока векселю купца А. Ждать наступленія срока онъ не можетъ, но не можетъ еще и требовать отъ купца А уплаты долга, а потому онъ рѣшаетъ вексель, выданный ему купцомъ А, продать какому-нибудь третьему лицу. Купецъ А, такимъ образомъ, долженъ уплатить по этому его векселю въ назначенный срокъ уже не купцу Б, а тому лицу, которому купецъ Б продастъ этотъ вексель еще до наступленія срока.

Само собой понятно, что никто не купитъ у купца Б этотъ вексель за 3,100 рублей, т.-е. за ту сумму, которая обозначена въ немъ, ибо лицо, купившее этотъ вексель, можетъ получить въ назначенный въ немъ срокъ лишь тоже 3,100 рублей отъ купца А, и покупка векселя въ такомъ случаѣ не принесетъ никакой пользы покупателю. Купецъ Б, слѣдовательно, желая продать вексель купца А до наступленія ему срока, долженъ покупателю предоставить нѣкоторую выгоду отъ этой покупки, т.-е. *продать вексель за цѣну меньшую, нежели вексельная сумма*. Въдь если купецъ Б продастъ вексель купца А за два мѣсяца до срока, то занятымъ у него капиталомъ купецъ А будетъ пользоваться не 5 мѣсяцевъ, какъ обозначено въ векселѣ, а всего лишь 3 мѣсяца, и поэтому въ свою пользу купецъ Б долженъ удерживать изъ вексельной суммы занятый капиталъ и процентныя деньги съ него только за *3 мѣсяца*, а процентныя деньги за оставшіеся до срока 2 мѣсяца онъ долженъ уступить тому лицу, которое будетъ владѣть векселемъ въ теченіе этихъ 2-хъ мѣсяцевъ, т.-е. лицу, которое купитъ этотъ вексель за 2 мѣсяца до срока. Итакъ, купецъ Б, продавая выданный ему вексель за 2 мѣсяца до срока, долженъ изъ вексельной суммы вычесть въ пользу покупателя процентныя деньги за два мѣсяца.

Этотъ вычетъ процентныхъ денегъ изъ вексельной суммы и носить названіе *учета*, или *дисконта*.

*Учесть*, или *дисконтировать* вексель — значить продать его за нѣкоторое время до срока съ вычетомъ, въ пользу покупателя, процентныхъ денегъ за оставшееся до срока время. Такого рода продажа векселей до срока, т.-е. учетъ векселей, въ коммерческихъ дѣлахъ практикуется въ весьма широкихъ размѣрахъ.

Обыкновенно векселя учитываются банками, которые въ свою пользу и удерживаютъ процентныя деньги за оставшееся до срока время.

Можетъ также случиться, что купецъ А самъ пожелаетъ уплатить купцу Б долгъ ранѣе означеннаго въ векселѣ срока, скажемъ, тоже за 2 мѣсяца. Купецъ А, такимъ образомъ, будетъ пользоваться занятымъ имъ капиталомъ въ теченіе не 5-ти мѣсяцевъ, а лишь 3-хъ; и такъ какъ вексельная сумма (3,100 рублей) содержитъ въ себѣ процентныя деньги за 5 мѣсяцевъ, то купецъ А изъ этой суммы долженъ вычесть процентныя деньги за тѣ 2 мѣсяца, которые остались до срока, и уплатить купцу Б не 3,100 рублей,



а эту сумму за вычетом процентных денег за неиспользованное время. Этот вычет есть тоже *учет* или *дисконтъ*, съ той только разницей, что учитывается вексель самимъ должникомъ, и процентныя деньги за оставшееся до срока время удерживаются имъ въ свою же пользу.

Пусть самъ купецъ А пожелалъ уплатить купцу Б долгъ за 2 мѣсяца до срока, назначеннаго въ векселѣ. Какъ опредѣлить, сколько долженъ будетъ купецъ А уплатить своему кредитору и каковъ будетъ учетъ? Проще и справедливѣе всего, казалось бы, разсчитаться купцамъ А и Б слѣдовало слѣдующимъ образомъ. Если купецъ А занялъ у купца Б 1-го сентября 1910 года 3,000 рублей по 8%, т.-е. по 8 руб. съ каждой сотни въ годъ, то черезъ 5 мѣсяцевъ, т.-е. къ 1-му февраля 1911 года, какъ мы уже узнали, купецъ А долженъ будетъ заплатить купцу Б 3,100 рублей всего. Но разъ купецъ А пожелалъ учсть свой вексель за 2 мѣсяца до его срока, онъ, очевидно, пользовался занятыми имъ тремя тысячами въ теченіе только: 5 мѣс.—2 мѣс. = 3-хъ мѣсяцевъ и долженъ уплатить купцу Б уже не 3,100 рублей, а меньше: 3,000 рублей да процентныя деньги съ нихъ за 3 мѣсяца. Разъ по условію купецъ А съ каждой сотни въ теченіе года долженъ былъ платить 8 рублей, то съ каждой сотни въ теченіе мѣсяца онъ долженъ уплатить: 8 руб. : 12 =  $\frac{2}{3}$  руб., а въ теченіе 3-хъ мѣсяцевъ:  $\frac{2}{3}$  руб.  $\times$  3 = 2 рубля—это съ одной сотни; а съ 3,000 руб., или 30-ти сотенъ: 2 руб.  $\times$  30 = 60 рублей. Итакъ, купецъ А, учитывая свой вексель за 2 мѣсяца до срока, долженъ уплатить купцу Б 3,000 рублей да 60 рублей процентныхъ денегъ, всего же 3,060 рублей; и изъ суммы, обозначенной въ векселѣ, купецъ А въ свою пользу удержать: 3,100 р.—3,060 р. = 40 рублей, т.-е. процентныя деньги за неиспользованные 2 мѣсяца,—это и будетъ учетъ.

Точно такимъ же образомъ долженъ былъ бы вычислить учетъ и самъ купецъ Б, если бы онъ пожелалъ продать этотъ вексель третьему лицу за 2 мѣсяца до срока; онъ долженъ былъ бы продать его за 3,060 руб., уступивъ, такимъ образомъ, 40 руб. въ пользу покупателя.

Но такое вычисленіе учета въ дѣйствительности невозможно, ибо, какъ намъ извѣстно, въ векселѣ не пишется отдѣльно занятый капиталъ и отдѣльно процентныя деньги съ него. Вслѣдствіе этого при учетѣ векселя не можетъ быть и рѣчи о томъ, какая сумма была въ дѣйствительности занята, и занятымъ капиталомъ считается сумма, прописанная въ векселѣ, т.-е. *капиталъ, дѣйствительно занятый, сложенный съ процентными деньгами съ него за все время, на которое онъ былъ занятъ*.

Въ векселѣ также, мы знаемъ, не обозначена и процентная такса, по которой былъ сдѣланъ заемъ, и потому, учитывается ли вексель банкомъ или третьимъ лицомъ, учитываетъ ли его самъ должникъ, процентная такса, по которой производится учетъ, совершенно не зависитъ отъ процентной таксы, по которой сдѣланъ былъ заемъ. Банки обыкновенно сами устанавливаютъ на болѣе или менѣе продолжительное время процентную таксу учета векселей; если же учетъ производится третьимъ лицомъ или самимъ должникомъ, то между ними и кредиторомъ происходитъ особое соглашеніе относительно процентной таксы, которая можетъ быть разной въ зависимости отъ разныхъ обстоятельствъ. Замѣтимъ только, что и въ томъ и въ другомъ



случаяхъ процентная такса означаетъ *учетъ съ каждаыхъ ста рублей валюты или вексельной суммы за 1 годъ до срока.*

Пусть вексель, выданный купцомъ А купцу Б, банкъ учтетъ за 2 мѣсяца до срока по  $7\frac{1}{2}\%$ . Процентная такса —  $7\frac{1}{2}\%$  — означаетъ, что банкъ, учитывая 100 рублей за 1 годъ до срока, удерживаетъ въ свою пользу  $7\frac{1}{2}$  рублей (или съ каждаго рубля  $7\frac{1}{2}$  коп.). Учитывая, слѣдовательно, 100 руб. за 1 мѣсяцъ до срока, банкъ удерживаетъ:  $7\frac{1}{2}$  руб.:  $12 = \frac{15}{2 \cdot 12} = \frac{5}{8}$  руб.; а за 2 мѣсяца —  $\frac{5}{8}$  руб.  $\times 2 = \frac{5}{4}$  руб. Если учеть за 2 мѣсяца до срока съ одной сотни составляетъ  $\frac{5}{4}$  рубля, то съ 3100 рублей, или съ 31 сотни, учеть составить сумму, въ 31 разъ большую, т.-е.:  $\frac{5}{4}$  руб.  $\times 31 = \frac{5 \cdot 31}{4} = \frac{155}{4} = 38\frac{3}{4}$  руб., или 38 руб. 75 коп., — это банкъ удержитъ въ свою пользу; а купцу Б, слѣдовательно, уплатить за вексель 3100 руб. — 38 р. 75 коп. = 3061 руб. 25 коп.

Пусть теперь самъ купецъ А пожелалъ учеть свой вексель за 2 мѣсяца до срока. Предварительно купецъ А и купецъ Б улаиваются относительно процентной таксы. Положимъ, оба согласились произвести учеть по 9%. Это значить, что съ каждой сотни, если бъ она была учтена за 1 годъ до срока, купецъ Б уступилъ бы купцу А 9 рублей. За 1 мѣсяцъ до срока, слѣдовательно, онъ уступитъ  $\frac{9}{12}$  руб. съ каждаыхъ ста рублей, а за 2 мѣсяца:  $\frac{9}{12}$  руб.  $\times 2 = \frac{3}{2}$  руб. со ста; съ 3100 рублей, или съ 31 сотни, это составитъ:  $\frac{3}{2}$  руб.  $\times 31 = \frac{93}{2} = 46\frac{1}{2}$  руб., или 46 руб. 50 коп.

Итакъ, купецъ Б соглашается вмѣсто 3100 рублей получить: 3100 руб. — 46 руб. 50 коп. = 3053 руб. 50 коп., а купецъ А, учитывая свой вексель за 2 мѣсяца до срока, изъ вексельной суммы въ свою пользу удержитъ 46 руб. 50 коп.

Именно такъ и производится учеть всѣхъ и всякихъ векселей въ торгово-промышленномъ оборотѣ: учеть означаетъ процентныя деньги за оставшееся до срока время *не съ дѣйствительно занятаго капитала, а съ вексельной суммы, съ валюты векселя.* Учетъ этотъ поэтому и называется **коммерческимъ учетомъ.**

## § 51. Математическій учетъ.

Коммерческій учетъ не совсѣмъ точенъ, однако.

Правда, въ векселѣ нѣтъ никакихъ указаній на то, какой капиталъ былъ въ дѣйствительности и первоначально занять, но и нельзя считать *всю* вексельную сумму занятымъ капиталомъ, т.-е. долгомъ, если вексель учитывается за нѣкоторое время до срока. 3000 рублей, занятое купцомъ А у купца Б по 8% 1-го сентября 1917 года, черезъ 5 мѣсяцевъ обратятся въ 3100 рублей, — эту сумму купецъ А прописалъ въ своемъ векселѣ, эта сумма и будетъ дѣйствительно долгомъ купца А купцу Б черезъ 5 мѣсяцевъ. Но если купецъ А пожелаетъ учеть свой вексель за 2 мѣсяца до срока, т.-е. если купецъ А пожелаетъ уплатить по векселю купцу Б спустя 3 мѣсяца послѣ совершенія займа, то его долгъ, очевидно, будетъ меньше вексельной суммы. Условимся, что вексельная сумма тогда уже будетъ обозначать не только долгъ, но долгъ въ суммѣ съ процентными деньгами съ него за оставшееся до срока время, т.-е. за 2 мѣсяца; иначе говоря, 3100 рублей будетъ та сумма, въ которую трехмѣсячный долгъ купца А купцу Б обратится еще черезъ 2 мѣсяца. И если купецъ А учеть свой вексель по 9%, то 3100 руб. будетъ тотъ капиталъ, въ который черезъ 2 мѣсяца обратится его трехмѣсячный долгъ, считая по 9%; если онъ учеть его по 8%,



то 3100 руб. будетъ та сумма, въ которую трехмѣсячный долгъ его обратится черезъ 2 мѣсяца, считая по 8%, и т. д.

Словомъ, валюта векселя есть долгъ за *все время*, на которое вексель выданъ; при учетѣ же слѣдуетъ считать долгомъ или занятымъ капиталомъ не всю вексельную сумму, а лишь часть ея, слѣдующую за *время до момента учета*. Валюту, значить, слѣдуетъ разсматривать вообще какъ своего рода наращенный капиталъ: если по векселю уплачивается по истеченіи срока, валюта представляетъ собой наращенный капиталъ, получившійся изъ первоначальнаго и въ дѣйствительности занятаго капитала въ теченіе этого срока; если же по векселю уплачивается за нѣкоторое время до срока, то валюта уже представляетъ тотъ наращенный капиталъ, который получился бы изъ суммы, слѣдующей за время до момента уплаты, отданной на время, оставшееся отъ момента уплаты до срока, по той процентной таксѣ, по которой производится учетъ. При такомъ взглядѣ на валюту, конечно, долженъ измѣниться и учетъ. Пусть купецъ А учелъ свой вексель по 9% за 2 мѣсяца до срока. Это значить, что купецъ А пользовался занятымъ у купца Б капиталомъ только 3 мѣсяца, и по истеченіи этихъ 3 мѣсяцевъ онъ пожелалъ разсчитаться съ своимъ кредиторомъ. Купецъ Б согласился произвести учетъ по 9%, т.-е. онъ согласился уступить купцу А нѣкоторую часть процентныхъ денегъ съ такимъ расчетомъ, чтобы съ каждой сотни занятаго капитала, если бѣ она была учтена за 1 годъ до срока, уступка эта составила 9 рублей. Какъ мы уже выше узнали, съ каждой сотни, учтенной за 2 мѣсяца до срока, это составитъ  $\frac{3}{2}$  руб., или  $1\frac{1}{2}$  руб.

Вексельная сумма—3100 рублей—содержитъ въ себѣ, такимъ образомъ, и долгъ за 3 мѣсяца, и ту сумму процентныхъ денегъ съ него, которую купецъ Б согласился уступить купцу А за досрочную уплату по векселю. Иначе говоря, 3100 рублей есть тотъ капиталъ, въ который черезъ 2 мѣсяца обратился бы трехмѣсячный долгъ купца А, считая по 9%. Каждая сотня этого долга черезъ 2 мѣсяца обратилась бы въ 100 руб. +  $1\frac{1}{2}$  руб. =  $101\frac{1}{2}$  руб., и, слѣдовательно, уплачивая по векселю теперь, купецъ А вмѣсто  $101\frac{1}{2}$  руб. платить 100 руб.; а вмѣсто 3100 рублей онъ долженъ уплатить столько разъ по 100 руб., сколько разъ  $101\frac{1}{2}$  содержится въ 3100, т.-е.  $3100 : 101\frac{1}{2} = 30,5419$  (съ точностью до одной десятичной) разъ по 100, или 3054,19 рубля (приблизительно). Учетъ, значить, равенъ будетъ: 3100 руб. — 3054,19 руб. = 45,81 руб., или 45 руб. 81 к.

На основаніи всего того, что сказано было выше, нетрудно замѣтить, что этотъ второй родъ учета векселей точнѣе коммерческаго учета и называется онъ, въ отличіе отъ коммерческаго, **математическимъ учетомъ**.

Коммерческій учетъ векселя купца А по 9% за 2 мѣсяца до срока равенъ 46 руб. 50 коп., а математическій учетъ — 45 руб. 81 коп. Математическій учетъ, очевидно, меньше коммерческаго. Это наблюдается не только въ данномъ случаѣ, но вообще всегда, ибо, согласно условію, коммерческій учетъ обозначаетъ процентныя деньги за оставшееся до срока время *со всей валюты*, математическій учетъ обозначаетъ процентныя деньги за то же время и при той же таксѣ *съ части валюты*; а чѣмъ капиталъ меньше, знаемъ мы, тѣмъ меньше процентныхъ денегъ принесетъ онъ въ то же время и при той же таксѣ. Да это и видно изъ того, что при процентной таксѣ въ 9% въ первомъ случаѣ съ каждыхъ ста рублей валюты учитывается 9 рублей за годъ, а во второмъ—тѣ же 9 руб. учитываются съ каждыхъ 109 руб.

Повторяемъ, въ торговомъ оборотѣ употребляется учетъ коммерческій, такъ какъ онъ проще вычисляется и, кромѣ того, представляетъ болѣшую выгоду тому, кто учитываетъ вексель: банку, должнику или вообще какому-нибудь третьему лицу.



## § 52. Задачи на учет векселей.

Въ задачахъ на учетъ векселей приходится имѣть дѣло съ слѣдующими величинами: съ *валютой* векселя, съ *суммой*, уплаченной за вексель при учетѣ, съ *учетомъ*, съ *процентной таксой* учета и, наконецъ, со *временемъ*, оставшимся до срока. Для большей простоты будемъ называть сумму, уплачиваемую за вексель при учетѣ, *цѣной* векселя. Въ каждой такой задачѣ обыкновенно даются три изъ этихъ величинъ, и требуется опредѣлить какую-нибудь четвертую; такъ, могутъ быть даны: валюта, процентная такса и время до срока, и требуется опредѣлить учетъ; могутъ быть даны: цѣна векселя, учетъ и время до срока, и требуется опредѣлить процентную таксу учета, и т. д. Въ зависимости отъ данныхъ и искомымъ величинъ задачи на учетъ векселей распадаются, главнымъ образомъ, на четыре группы, и *рѣшаются эти задачи вообще наподобіе задачъ на проценты*. Убѣдимся въ этомъ на примѣрахъ.

**Задача 1.** Вексель въ 3702 рубля учтенъ за 4 мѣсяца до срока по  $8\frac{1}{2}\%$ . Каковъ учетъ?

*Коммерческій учетъ.* Чтобы опредѣлить коммерческій учетъ съ 3702 рублей за 4 мѣсяца до срока, предварительно опредѣлимъ учетъ съ 1-го рубля за 1 мѣсяць при той же процентной таксѣ: учетъ съ 1-го рубля за 1 годъ до срока составляетъ  $8\frac{1}{2}$  коп.; учетъ съ 1-го рубля за 1 мѣсяць, слѣдовательно, составитъ сумму, въ 12 разъ меньшую, т.-е.  $8\frac{1}{2}$  коп.:  $12 = \frac{17}{2.12} = \frac{17}{24}$  коп. Учетъ съ 1-го рубля за 4 мѣсяца, такимъ образомъ, будетъ равенъ  $\frac{17}{24}$  к.  $\times 4 = \frac{17}{6}$  к. Если учетъ съ 1-го рубля за 4 мѣсяца до срока составляетъ  $\frac{17}{6}$  коп., то учетъ съ 3702-хъ рублей за то же время составитъ сумму, въ 3702 раза ббльшую, т.-е.  $\frac{17}{6}$  коп.  $\times 3702 = 10489$  коп., или 104 руб. 89 коп.

Это—рѣшеніе способомъ *приведенія къ единицѣ*, такъ какъ для того, чтобы отвѣтить на вопросъ задачи, т.-е. чтобы опредѣлить учетъ съ 3702 руб. за 4 мѣсяца до срока, мы сначала опредѣлили учетъ съ 1-го рубля за 1 мѣсяць: и валюту, значить, и время до срока мы привели къ единицѣ.

На практикѣ рѣшеніе это располагается для большаго удобства такъ:

съ	1 руб.	за 1 годъ до срока по $8\frac{1}{2}\%$	учетъ сост.	$8\frac{1}{2}$ коп.
»	1	» » 1 мѣс. » » » $8\frac{1}{2}\%$	»	$8\frac{1}{2}$ коп. : 12 = $\frac{17}{2.12}$ коп.
»	1	» » 4 » » » $8\frac{1}{2}\%$	»	$\frac{17}{2.12}$ коп. $\times 4 = \frac{17.4}{2.12}$ коп.
				2 617
»	3702	» » 4 » » » $8\frac{1}{2}\%$	»	$\frac{17.4}{2.12}$ коп. $\times 3702 = \frac{17.4.3702}{2.12}$
				6

Сокративъ и перемноживъ, получаемъ: 10489 коп. = 104 руб. 89 коп.

Эту же задачу можно рѣшить и посредствомъ *тройного правила*.

Опредѣлить учетъ съ 3702 руб. за 4 мѣс. до срока при  $8\frac{1}{2}\%$ —значить узнать, сколько процентныхъ денегъ получится съ 3702 руб. за 4 мѣсяца, считая по  $8\frac{1}{2}\%$ . Валюта (3702 рубля) есть, такимъ образомъ, своего рода находящійся въ ростъ капиталъ, время до срока (4 мѣс.) какъ бы обозначаетъ время роста этого капитала, а процентная такса учета ( $8\frac{1}{2}\%$ ) обозна-



часть процентных денег со 100 рублей за 1 годъ. Такъ какъ процентныя деньги съ одного и того же капитала при одной и той же процентной таксѣ прямо пропорціональны времени роста, то и *учетъ съ одной и той же валюты при той же процентной таксѣ прямо пропорціоналенъ времени до срока*. И дѣйствительно, чѣмъ больше то время, которое осталось до срока, тѣмъ больше будетъ учетъ, и чѣмъ меньше время, оставшееся до срока, тѣмъ меньше будетъ учетъ. Если, на примѣръ, учетъ съ 1 рубля за 1 годъ до срока составляетъ  $8\frac{1}{2}$  коп., то учетъ съ 1 рубля за 1 мѣсяць до срока будетъ въ 12 разъ меньше.

Далѣе, такъ какъ процентныя деньги за одно и то же время и при той же таксѣ прямо пропорціональны и капиталу, отданному въ ростъ, то и *учетъ прямо пропорціоналенъ валютѣ*. Да и на самомъ дѣлѣ, чѣмъ больше валюта, тѣмъ больше и учетъ съ нея за то же время и при той же таксѣ, и чѣмъ меньше валюта, тѣмъ этотъ учетъ меньше. Учетъ съ 1 рубля за 4 мѣсяца до срока при  $8\frac{1}{2}\%$  составляетъ  $\frac{17}{6}$  коп., а съ 3702 руб. за то же время учетъ составитъ сумму, въ 3702 раза большую.

Итакъ, и по даннымъ величинамъ и по искомой взятая нами задача есть задача первой группы на проценты; кромѣ того, зависимость искомой величины отъ данныхъ въ этой задачѣ такая же, какъ и въ задачахъ на проценты. А потому, обозначивъ искомую величину буквой  $x$ , мы всю задачу можемъ записать такъ:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{учетъ съ} & 1 \text{ руб.} & \text{за} & 12 \text{ мѣс.} & \text{до срока сост.} & 8\frac{1}{2} \text{ коп.} & & & & & \\ \text{»} & \text{»} & 3702 & \text{»} & \text{»} & 4 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & x & \text{»} \\ \hline x = 8\frac{1}{2} \text{ коп.} & \times \frac{4}{12} & \times \frac{3702}{1} = \frac{17}{2} \times \frac{4}{12} \times \frac{3702}{1} = \frac{17.4.3702}{2.12.1} = 10489 \text{ коп.} \\ & & & & & & & & & & \text{или } 104 \text{ руб. } 89 \text{ коп.} \end{array}$$

Если бъ  $x$  обозначалъ учетъ за 4 мѣсяца до срока не съ 3702 рублей, а съ 1 рубля, то онъ долженъ былъ бы быть во столько разъ меньше  $8\frac{1}{2}$  коп., во сколько разъ 4 мѣсяца меньше 12 мѣсяц., т.-е.  $x$  относился бы къ  $8\frac{1}{2}$  такъ, какъ 4 относится къ 12; и, составивъ пропорцію  $x : 8\frac{1}{2} = 4 : 12$ , мы получили бы, что  $x$  равенъ  $(8\frac{1}{2} \times 4) : 12 = \frac{17.4}{2.12} = \frac{17.1}{2.3} = \frac{17}{6}$  коп.,—это учетъ съ 1 рубля за 4 мѣсяца до срока. Но  $x$  на самомъ дѣлѣ обозначаетъ учетъ съ 3702 руб. за 4 мѣс. до срока, а потому онъ долженъ быть во столько разъ больше  $\frac{17}{6}$  коп., во сколько разъ 3702 рубля больше одного рубля, т.-е.  $x : \frac{17}{6} = 3702 : 1$ , откуда  $x = (\frac{17}{6} \times 3702) : 1 = \frac{17.3702}{6.1} = 104 \text{ руб. } 89 \text{ к.}$  Это уже отвѣтъ на вопросъ задачи.

Это второе рѣшеніе нашей задачи есть рѣшеніе посредствомъ пропорцій—именно посредствомъ сложнаго тройного правила, такъ какъ для того, чтобы опредѣлить значеніе  $x$ , мы составили двѣ пропорціи. На подобіе этой задачи рѣшаются всѣ такія задачи на учетъ векселей, въ которыхъ дается валюта, процентная такса и время до срока и требуется опредѣлить учетъ.

Мы могли бы рѣшить эту задачу и посредствомъ правилъ, выведенныхъ въ отдѣлѣ сложнаго тройного правила. Такъ какъ учетъ прямо пропорціоналенъ времени и валютѣ, то  $x$  равенъ  $\frac{17}{2}$ , умноженнымъ на



произведеіе отношеній чиселъ нижней строки къ соотвѣствующимъ числамъ верхней строки:  $\frac{4}{12} \cdot \frac{3702}{1}$ ; значить,  $x = \frac{17}{2} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3702}{1}$ .

Весьма часто встрѣчаются такія задачи, въ которыхъ даны тѣ же величины, что въ задачѣ 1-й, но требуется въ нихъ опредѣлить не учетъ, а *цѣну векселя*, т.-е. сумму, уплаченную за вексель при учетѣ. Такъ, пусть во взятой нами задачѣ требуется опредѣлить цѣну векселя, т.-е. пусть въ ней спрашивается, *какова цѣна векселя въ 3702 рубля, учтеннаго по 8½% за 4 мѣсяца до срока*. Проще всего, конечно, отвѣтить на вопросъ такой задачи, вычисливъ сначала учетъ и затѣмъ отнявъ его отъ валюты. Узнавъ, что учетъ составитъ сумму въ 104 руб. 89 коп., вычитаемъ его изъ валюты: 3702 руб. — 104 руб. 89 коп. = = 3597 руб. 11 коп.,—это и будетъ цѣна векселя.

**Математическій учетъ.** Посмотримъ теперь, какъ слѣдовало бы рѣшить задачу 1-ю, если бы требовалось опредѣлить математическій учетъ.¶

При математическомъ учетѣ валюту слѣдуетъ разсматривать, какъ тотъ капиталъ, въ который обратился бы долгъ по векселю за время до момента учета, если бѣ его уплатить по наступленіи срока. Такъ, валюта векселя въ 3702 руб., учтеннаго по 8½% за 4 мѣсяца до срока, обозначаетъ тотъ капиталъ, въ который обратился бы долгъ по этому векселю за время до момента учета, если бѣ его уплату отсрочить на 4 мѣсяца и если бѣ за эти 4 мѣсяца проценты взимались съ такимъ расчетомъ, чтобы на каждую сотню рублей въ годъ пришлось 8½ рублей и на каждый рубль 8½ коп. Въ 3702-хъ рубляхъ, значить, содержится и этотъ долгъ, и процентныя деньги съ него за время до срока. Такъ какъ этотъ долгъ неизвѣстенъ, то мы назовемъ его буквой *x*. Теперь мы должны рѣшить такого рода вопросъ: *какой именно капиталъ при 8½% черезъ 4 мѣсяца обратится въ 3702 рубля?* Отвѣтивъ на этотъ вопросъ, мы узнаемъ, какой величины достигъ долгъ по этому векселю къ моменту учета его; иначе говоря,—узнаемъ ту сумму, которую слѣдуетъ уплатить за этотъ вексель при математическомъ учетѣ его за 4 мѣсяца до срока.

Каждый рубль этого искомаго капитала обратился бы черезъ годъ въ 1 р. + 8½ к., а весь онъ черезъ 4 мѣсяца обратится въ 3702 рубля. Запишемъ это такъ:

1 руб. въ 1 годъ обратится въ 108½ коп.

*x* » » 4 мѣс. » » 3702 руб., или 370200 коп.

Намъ, очевидно, нужно опредѣлить начальный капиталъ по данному наращенному капиталу и времени. Но мы знаемъ, что наращенный капиталъ пропорціоналенъ начальному только при одинаковомъ времени. Необходимо, слѣдовательно, опредѣлить, во что обратится 1 руб. искомаго капитала черезъ 4 мѣсяца. Если въ годъ съ каждаго рубля взимается 8½ коп., то въ 1 мѣсяць это составитъ 8½ коп. : 12 =  $\frac{17}{2 \cdot 12}$  коп., а въ 4 мѣсяца:  $\frac{17}{2 \cdot 12} \cdot 4$  коп. = 2½ коп., и 1 рубль черезъ 4 мѣсяца обратится въ 1 руб. + 2½ коп. = 102½ коп. Снова запишемъ задачу нашу въ двѣ строки:

1 руб. въ 4 мѣс. обратится въ 102½ коп.

*x* » » 4 » » » 370200 »

---


$$x : 1 = 370200 : 102\frac{1}{2} ; \text{откуда } x = \frac{370200 \cdot 6}{617} = 3600 \text{ рублей.}$$

Понятно, что *x* будетъ во столько разъ больше 1 рубля, во сколько разъ 370200 коп. больше 102½ коп., т.-е. *x* будетъ относиться къ 1 рублю, какъ 370200 к. относится къ 102½ коп. Составивъ пропорцію, находимъ, что *x* = 3600 руб. Это значить, что долгъ по этому векселю при математическомъ учетѣ по 8½% за 4 мѣсяца до срока достигнетъ 3600 рублей, т.-е. что цѣна векселя при этомъ учетѣ



составить сумму въ 3600 рублей. А теперь уже можно опредѣлить и учетъ, отнявъ цѣну отъ валюты: 3702 рубля — 3600 рублей = 102 рубля, — это и есть математическій учетъ даннаго векселя.

Въ задачѣ 1-й требуется опредѣлить не цѣну векселя, а учетъ; мы, значить, прежде, чѣмъ отвѣтить на вопросъ задачи, опредѣлили цѣну векселя и потомъ уже опредѣлили учетъ. Такъ удобно поступать и во всѣхъ подобныхъ случаяхъ: прежде всего опредѣляютъ, во что обратится за время отъ уплаты долга до срока каждый рубль этого долга, затѣмъ изъ пропорціи находится самый долгъ или цѣна векселя, и, наконецъ, опредѣляютъ учетъ вычитаніемъ цѣны изъ валюты.

Впрочемъ, можно и сразу опредѣлить учетъ.

Вмѣсто каждаго рубля долга, если бъ его уплату отсрочить на 4 мѣсяца, пришлось бы уплатить, какъ мы узнали выше,  $102\frac{5}{8}$  коп., а учитывая вексель за 4 мѣсяца до срока, эти  $2\frac{5}{8}$  коп., наоборотъ, удерживались бы въ свою пользу тѣмъ, кто учитывалъ вексель.

Итакъ, учетъ съ каждыхъ  $102\frac{5}{8}$  коп. составлялъ  $2\frac{5}{8}$  коп., а со всей валюты учетъ составилъ сумму, во столько разъ большую  $2\frac{5}{8}$  коп., во сколько разъ 3702 рубля больше  $102\frac{5}{8}$  коп. Запишемъ это въ двѣ строки:

учетъ съ  $102\frac{5}{8}$  коп. за 4 мѣс. до срока сост.  $2\frac{5}{8}$  коп.  
 » » 370200 » » 4 » » » »  $x$

$$x : 2\frac{5}{8} = 370200 : 102\frac{5}{8}; \text{ откуда } x = \frac{17 \cdot 370200 \cdot 6}{6 \cdot 617} = 10200 \text{ коп., или } 102 \text{ руб.}$$

Составивъ пропорцію, мы найдемъ, что учетъ равенъ 102 рублямъ.

## УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Вексель въ 3664 рубля учтенъ по 6% за 3,5 мѣсяца. Каковъ учетъ коммерческій и математическій?

1) Коммерческій учетъ равенъ:  
 $\frac{6 \cdot 35 \cdot 3664}{12 \cdot 10} = 6412 \text{ коп., или } 64 \text{ р. } 12 \text{ к.}$   
 Математич. учетъ:  $\frac{7 \cdot 3664 \cdot 4}{4 \cdot 407} = 63,02 \text{ р.}$   
 (приблизительно).

2) Вексель въ 2500 рублей учтенъ за  $1\frac{1}{2}$  года до срока по 8%, при чемъ учетъ (коммерч.) составилъ 300 рублей. Сколько уплачено было за вексель?

2) Отв. 2200 руб.

**Задача 2.** Вексель въ 3702 рубля учтенъ за 4 мѣсяца до срока, при чемъ учетъ составилъ сумму въ 104 руб. 89 коп. Опредѣлить процентную таксу учета.

**Коммерческій учетъ.** Рѣшимъ эту задачу сначала способомъ приведенія къ единицѣ. Опредѣлить процентную таксу — значить узнать, каковъ учетъ съ каждаго рубля валюты за одинъ годъ до срока. Если учетъ съ 3702 рублей за 4 мѣсяца составляетъ 104 руб. 89 коп., то за 1 мѣсяць онъ составитъ сумму, въ 4 раза меньшую:  $104 \text{ р. } 89 \text{ к.} : 4 = \frac{10489}{4} \text{ коп.,}$  а въ 12 мѣсяцевъ — въ 12 разъ большую:  $\frac{10489 \cdot 12}{4} \text{ коп.} = 10489,3 \text{ коп.} = 31467 \text{ коп.,}$  — это учетъ съ 3702 р. за 1 годъ до срока. Учетъ съ 1 рубля за 1 годъ до срока будетъ, понятно, въ 3702 раза меньше, т.-е.  $31467 \text{ коп.} : 3702 = \frac{31467}{3702} \text{ коп.} = 8\frac{1}{2} \text{ коп.,}$  — это значить, что учетъ былъ сдѣланъ по  $8\frac{1}{2}\%$ .



На практикѣ рѣшеніе располагается такъ:

учетъ съ 3702 руб. за 4 мѣс. до срока сост. 10489 коп.

» » 3702 » » 1 » » » »  $\frac{10489}{4}$  коп.

» » 3702 » » 12 » » » »  $\frac{10489 \cdot 12^3}{4} = 31467$  коп.

» » 1 » » 12 » » » »  $\frac{31467}{3702} = 8\frac{1}{2}$  к., или  $8\frac{1}{2}\%$ .

Такъ какъ валюта векселя обозначаетъ отданный въ ростъ капиталъ, а учетъ есть процентныя деньги съ этого капитала за нѣкоторое время, то задачу 2-ю можно рѣшить и *тройнымъ правиломъ*. Определить процентную таксу учета—значить узнать, по сколько процентовъ надо было отдать 3702 руб., чтобы они въ 4 мѣсяца принесли 104 руб. 89 коп. доходу, или сколько доходу принесть 1 рубль въ теченіе года, если 3702 руб. въ 4 мѣсяца принесли 104 руб. 89 коп.

Процентныя деньги прямо пропорціональны времени и капиталу, а потому учетъ прямо пропорціоналенъ времени до срока и валютѣ, — въ этомъ мы уже убѣдились въ задачѣ 1-й.

Задача 2-я на учетъ векселей есть, такимъ образомъ, по своимъ даннымъ величинамъ и искомой задача второй группы на проценты. Запишемъ ее въ двѣ строки:

учетъ съ 3702 руб. за 4 мѣс. до срока сост. 104 руб. 89 коп.

» » 1 » » 12 » » » » x

$$x = 10489 \text{ коп.} \times \frac{12}{4} \times \frac{1}{3702} = \frac{10489 \cdot 12 \cdot 1}{4 \cdot 3702} = 8\frac{1}{2} \text{ коп., или } 8\frac{1}{2}\%.$$

Если бъ x обозначалъ учетъ съ 3702 рублей за 12 мѣсяцевъ, то, понятно, онъ долженъ былъ бы быть во столько разъ больше 104 руб. 89 коп., во сколько разъ 12 больше 4-хъ, и мы получили бы слѣдующую пропорцію:  $x : 104 \text{ р. } 89 \text{ к.} = 12 : 4$ ; откуда  $x = \frac{10489 \cdot 12}{4}$  коп. = 10489.3 = 31467 коп. Но x обозначаетъ учетъ за 12 мѣсяцевъ не съ 3702 рублей, а съ 1 рубля; слѣдовательно, то значеніе, которое получилось бы при этой пропорціи, было бы не дѣйствительное значеніе его: дѣйствительное значеніе его во столько разъ меньше значенія, найденнаго изъ первой пропорціи, во сколько разъ 1 рубль меньше 3702-хъ рублей, т.-е.  $x : 31467 \text{ коп.} = 1 : 3702$ ; откуда  $x = \frac{31467 \cdot 1}{3702} = 8\frac{1}{2}$  коп.

Рѣшивъ эту задачу способомъ пропорцій, мы укажемъ на то, что полученный результатъ можно было получить непосредственно при помощи правилъ, изложенныхъ въ отдѣлѣ тройного правила.

Бываютъ задачи, въ которыхъ также требуется определить процентную таксу и даны время, оставшееся до срока, учетъ и *цѣна* векселя вмѣсто валюты.

Цѣна векселя не пропорціональна ни времени до срока, ни таксѣ, а потому, если бъ требовалось определить таксу учета по даннымъ цѣнѣ, времени и учету, то такую задачу тройнымъ правиломъ рѣшить нельзя. Въ такихъ случаяхъ предварительно къ цѣнѣ прибавляютъ учетъ, отъ чего получится валюта векселя, и затѣмъ уже рѣшаютъ задачу такъ, какъ рѣшена была задача 2-я.



**Математическій учетъ.** Если предположить, что учетъ векселя въ 3702 р. былъ математическій и что учетъ этотъ сдѣланъ былъ по той же процентной таксѣ, что и коммерческій, то, понятно, сумма математическаго учета будетъ не та же, что коммерческаго. Какъ мы узнали изъ задачи 1-й, математическій учетъ этого векселя при той же таксѣ и за то же время равенъ не 104 руб. 89 коп., а 102 рублямъ. И желая оставить процентную таксу такой же, какъ при коммерческомъ учетѣ, мы должны задачу 2-ю измѣнить слѣдующимъ образомъ: *вексель въ 3702 рубля учтенъ за 4 мѣсяца до срока, при чемъ учетъ составилъ сумму въ 102 рубля; опредѣлить процентную таксу учета.*

Такъ какъ валюта есть здѣсь наращенный капиталъ, и въ ней содержится и цѣна векселя и процентныя деньги съ нея за 4 мѣсяца, т.-е. 102 руб., то цѣна векселя, будучи здѣсь первоначальнымъ капиталомъ, равна валютѣ безъ учета, т.-е. 3702 руб. — 102 руб. = 3600 руб. Теперь вся задача уже заключается въ слѣдующемъ: опредѣлить, сколько процентныхъ денегъ получится съ 1 рубля въ 1 годъ, если съ 3600 рублей за 4 мѣсяца получилось 102 рубля, или 10200 коп. Намъ, иначе говоря, нужно опредѣлить процентную таксу по данному начальному капиталу, времени и процентнымъ деньгамъ за 4 мѣсяца, а это есть задача второй группы на проценты. Запишемъ ее въ двѣ строки:

съ 3600 руб. въ 4 мѣс. получ. 10200 коп.

» 1 » » 12 » » x

$$x = 10200 \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{1}{3600} = \frac{10200 \cdot 12 \cdot 1}{4 \cdot 3600} = 8\frac{1}{2} \text{ коп., или } 8\frac{1}{2} \text{ ‰.}$$

### УПРАЖНЕНІЯ.

Рѣшенія:

1) Вексель въ 2700 руб. учтенъ былъ за  $8\frac{1}{2}$  мѣсяца до срока, при чемъ учетъ (коммерч.) составилъ 100 рублей. Опредѣлить процентную таксу учета.

$$1) \quad x = 10000 \text{ коп.} \times \frac{12.3}{25} \times \frac{1}{2700} = \frac{10000 \cdot 12.3}{25 \cdot 2700} = 5\frac{10}{9} \text{ ‰.}$$

2) Вексель въ 1435 руб. учтенъ былъ (математ. учетомъ) за 6 мѣсяцевъ до срока, при чемъ за него уплачено было 1400 рублей. Опредѣлить процентную таксу учета.

$$2) \quad \text{Учетъ, очевидно, былъ равенъ: } 1435 \text{ руб.} - 1400 \text{ руб.} = 35 \text{ руб.; а теперь}$$

$$x = 3500 \text{ коп.} \times \frac{12}{6} \times \frac{1}{1400} = \frac{3500 \cdot 12}{6 \cdot 1400} = 5 \text{ ‰.}$$

**Задача 3.** Вексель въ 3702 рубля учтенъ за нѣкоторое время до срока по  $8\frac{1}{2}$  ‰, при чемъ учетъ составилъ сумму въ 104 руб. 89 коп. За сколько времени до срока былъ сдѣланъ учетъ?

**Коммерческій учетъ.** Если съ 3702 рублей за время до срока учетъ составилъ 104 руб. 89 коп., то съ каждаго рубля за это время учетъ составитъ сумму, въ 3702 раза меньшую, т.-е.  $\frac{10489}{3702}$  коп. =  $2\frac{5}{6}$  коп. Такъ какъ учетъ съ 1 рубля за 1 годъ составляетъ  $8\frac{1}{2}$  коп., а за искомое время  $2\frac{5}{6}$  коп., то искомое время должно быть во столько разъ меньше года, во сколько разъ  $2\frac{5}{6}$  меньше  $8\frac{1}{2}$ . Но  $2\frac{5}{6}$  меньше  $8\frac{1}{2}$  въ три раза, ибо  $8\frac{1}{2} : 2\frac{5}{6} = 3$ . Поэтому и искомое время меньше года въ 3 раза; слѣдовательно, время до срока равно  $\frac{1}{3}$  года, или 4 мѣсяцамъ. На практикѣ дѣйствіе располагается такъ:

учетъ съ 3702 руб. сост. 10489 коп. за все время

» » 1 » »  $\frac{10489}{3702} = 2\frac{5}{6}$  К. » » »

» » 1 » »  $8\frac{1}{2}$  коп. за 1 годъ.

$$\text{Время} = 2\frac{5}{6} : 8\frac{1}{2} = \frac{17.2}{6.17} = \frac{1}{3} \text{ года, или 4 мѣс.}$$



Посредством *тройного правила* задача эта рѣшается наподобіе задачъ 3-й группы на проценты, ибо опредѣлить, за сколько времени до срока сдѣланъ учетъ векселя, — значитъ узнать, сколько времени долженъ находиться въ ростѣ капиталъ въ 3702 рубля, чтобы при  $8\frac{1}{2}\%$  онъ принесъ 104 руб. 89 коп. дохода.

Мы знаемъ уже, что время до срока прямо пропорціоально учету. Такъ какъ время обратно пропорціоально капиталу, то и время до срока обратно пропорціоально валютѣ. Дѣйствительно, учетъ съ 1 рубля за 1 годъ составитъ  $8\frac{1}{2}$  коп., а съ 2 рублей учетъ составитъ  $8\frac{1}{2}$  коп. за  $\frac{1}{2}$  г., т.-е. чѣмъ *больше* время до срока, тѣмъ *меньше* должна быть валюта, чтобы съ нея получился тотъ же учетъ.

Запишемъ всю задачу въ двѣ строки:

учетъ съ 1 руб. сост.  $8\frac{1}{2}$  копеекъ за 12 мѣс. до срока  
 » » 3702 » » 104 р. 89 к. » x » » »

$$x = 12 \text{ мѣс.} \times \frac{10489.2}{17} \times \frac{1}{3702} = \frac{12 \cdot 10489 \cdot 2.1}{17 \cdot 3702} = 4 \text{ мѣсяца.}$$

Предположивъ, что валюта векселя равна одному рублю, мы можемъ опредѣлить, за сколько времени до срока былъ произведенъ учетъ при учетѣ въ 104 руб. 89 коп. изъ пропорціи  $x : 12 = 10489 : \frac{17}{2}$ ,  $x = \frac{12 \cdot 10489 \cdot 2}{17}$ . Таково было бы время до срока при нашемъ предположеніи. Но валюта равна не 1 р., а 3702 р. Понятна, поэтому, пропорція  $x : \frac{12 \cdot 10489 \cdot 2}{17} = 1 : 3702$ . Окончательно  $x$  равенъ:  $\frac{12 \cdot 10489 \cdot 2}{17} \times \frac{1}{3702} = \frac{12 \cdot 10489 \cdot 2.1}{17 \cdot 3702} = 4 \text{ мѣс.}$

Бываютъ задачи, въ которыхъ требуется также опредѣлить время до срока по данной таксѣ, учету и *цѣнѣ* векселя. Такія задачи тройнымъ правиломъ рѣшить нельзя, ибо цѣна векселя и время, оставшееся до срока, не пропорціоальны другъ другу. Въ такихъ случаяхъ къ цѣнѣ прибавляютъ учетъ, что дастъ валюту, и затѣмъ уже рѣшаютъ задачу тройнымъ правиломъ наподобіе задачи 3-й.

**Математическій учетъ.** Если бѣ вексель въ 3702 рубля былъ учтенъ по  $8\frac{1}{2}\%$  математическимъ учетомъ, то за исковое время учетъ былъ бы равенъ не 104 руб. 89 коп., а 102 рублямъ. Мы поэтому задачу 3-ю должны измѣнить и выразить такъ: *вексель въ 3702 руб. учтенъ за нѣкоторое время до срока по  $8\frac{1}{2}\%$  математическимъ учетомъ, при чемъ учетъ составилъ сумму въ 102 рубля; за сколько времени до срока былъ содѣланъ учетъ?* Задачу эту другими словами можно выразить такъ: въ теченіе какого времени цѣна этого векселя обратится въ 3702 рубля при  $8\frac{1}{2}\%$  таксѣ? Разъ валюта равна 3702 руб., а учетъ составляетъ 102 руб., то цѣна векселя равна 3702 руб. — 102 руб. = 3600 руб. И вся задача теперь уже заключается въ томъ, чтобы опредѣлить, черезъ сколько времени 3600 рублей принесутъ 102 рубля процентныхъ денегъ, если каждый рубль приноситъ въ 1 годъ  $8\frac{1}{2}$  коп. У насъ получилась задача 3-й группы на проценты, гдѣ по данному капиталу, таксѣ и процентнымъ деньгамъ требуется опредѣлить время роста капитала. Запишемъ задачу въ двѣ строки:

съ 1 руб. получ.  $8\frac{1}{2}$  коп. въ 12 мѣс.  
 » 3600 » » 10200 » x »

$$x = 12 \text{ мѣс.} \times \frac{10200.2}{17} \times \frac{1}{3600} = \frac{12 \cdot 10200 \cdot 2.1}{17 \cdot 3600} = 4 \text{ мѣсяца.}$$



## УПРАЖНЕНИЯ.

Рѣшенія:

1) Учетъ (коммерч.) съ векселя въ 1200 рублей по  $7\frac{1}{2}\%$  составилъ сумму въ 75 руб. За сколько времени до срока былъ сдѣланъ учетъ?

$$1) x = \frac{12.7500.2}{15.1200} = 10 \text{ мѣсяцевъ.}$$

2) За вексель въ 3608 руб. при математическомъ учетѣ по  $8\%$  уплачено было 3300 руб. За сколько времени до срока сдѣланъ былъ учетъ?

$$2) \text{ Учетъ равенъ } 3608 \text{ руб. — } 3300 \text{ руб.} = 308 \text{ руб.}; x, \text{ слѣдовательно, равенъ: } \frac{12.30800}{8.3300} = 14 \text{ мѣсяцевъ, или 1 годъ 2 мѣсяца.}$$

**Задача 4.** Вексель былъ учтенъ за 4 мѣсяца до срока по  $8\frac{1}{2}\%$ , при чемъ учетъ составилъ сумму въ 104 руб. 89 коп. Какова валюта этого векселя?

**Коммерческій учетъ.** Съ каждого рубля валюты за 1 годъ до срока учетъ составляетъ  $8\frac{1}{2}$  коп.; за 1 мѣсяць учетъ этотъ составитъ  $8\frac{1}{2}$  к. : 12 =  $\frac{17}{2.12}$  коп., а за 4 мѣсяца  $\frac{17.4}{2.12} = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$  коп. Если же со всей валюты учетъ составилъ 104 руб. 89 коп., то, очевидно, валюта содержитъ столько рублей, сколько разъ  $2\frac{5}{6}$  к. содержится въ 104 р. 89 к.

Учетъ съ 1 руб. за 1 годъ до срока сост.  $8\frac{1}{2}$  коп.

$$» \quad » \quad 1 \quad » \quad » \quad 1 \text{ мѣс. } » \quad » \quad » \quad 8\frac{1}{2} : 12 = \frac{17}{2.12} \text{ коп.}$$

$$» \quad » \quad 1 \quad » \quad » \quad 4 \quad » \quad » \quad » \quad \frac{17}{2.12} \times 4 = \frac{17.4}{2.12} = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6} \text{ к.}$$

---


$$\text{Валюта равна } 10489 \text{ коп. : } 2\frac{5}{6} \text{ коп.} = \frac{10489.6}{17} = 3702 \text{ руб.}$$

**Тройнымъ правиломъ** задача эта рѣшается наподобіе задачъ 4-й группы на проценты, ибо опредѣлить валюту—значить узнать, съ какаго капитала получится 104 руб. 89 коп. процентныхъ денегъ при  $8\frac{1}{2}\%$ -й таксѣ. Запишемъ эту задачу въ двѣ строки:

учетъ съ 1 руб. за 12 мѣс. до срока составитъ  $8\frac{1}{2}$  коп.

$$» \quad » \quad x \quad » \quad » \quad 4 \quad » \quad » \quad » \quad 10489 \quad »$$

---


$$x = 1 \text{ руб.} \times \frac{12}{4} \times \frac{10489.2}{17} = \frac{1.12.10489.2}{4.17} = 3702 \text{ руб.}$$

Такъ же какъ и начальный капиталъ, валюта прямо пропорціональна процентнымъ деньгамъ съ нея, т.-е. учету, и обратно пропорціональна времени до срока. Чтобы получить  $x$ , сначала опредѣлимъ значеніе его при предположеніи, что учетъ за 4 мѣс. равенъ  $8\frac{1}{2}$  коп.; тогда валюта будетъ во столько разъ больше одного рубля, во сколько разъ время до срока меньше одного года (обратная пропорціональность):  $x_1 : 1 = 12 : 4$ ,  $x_1 = \frac{12}{4}$ . Теперь мы знаемъ, что валютѣ, равной  $\frac{12}{4}$  руб., соотвѣтствуетъ учетъ въ  $8\frac{1}{2}$  к. за 4 мѣсяца до срока. А учету въ 10489 к. соотвѣтствуетъ валюта, опредѣляемая изъ пропорціи  $x : \frac{12}{4} = 10489 : 8\frac{1}{2}$ , откуда  $x = \frac{12.10489.2}{4.17} = 3702$  рубля,—это и есть валюта векселя.

Встрѣчаются задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить валюту векселя, но вмѣсто учета въ нихъ дана цѣна векселя. Такъ, если бъ въ задачѣ 4-й вмѣсто учета дана была сумма, уплаченная за вексель при учетѣ,



задача эта имѣла бы такой видъ: за *вексель, который былъ учтенъ за 4 мѣсяца до срока по  $8\frac{1}{2}\%$ , уплачено было 3597 руб. 11 коп.; какова валюта этого векселя?* Такъ какъ съ каждаго рубля валюты за 1 годъ учитывается  $8\frac{1}{2}\%$  коп., то цѣна рубля, учтеннаго за 1 годъ до срока, равна: 1 руб. —  $8\frac{1}{2}\%$  коп. =  $91\frac{1}{2}\%$  коп.

Теперь мы всю задачу можемъ представить въ такомъ видѣ:

вмѣсто 1 рубля, учтен. за 12 мѣс. до срока, получ.  $91\frac{1}{2}\%$  коп.

» x » » 4 » » » 3597 р. 11 к.

Но цѣна векселя пропорціональна валютѣ только при одинаковомъ времени. Нужно, слѣдовательно, узнать цѣну 1 рубля, учтеннаго тоже за 4 мѣсяца. Учетъ съ 1 рубля за 4 мѣсяца при  $8\frac{1}{2}\%$ , знаемъ мы, составляетъ  $2\frac{5}{8}\%$  коп.; слѣдовательно, цѣна его равна будетъ 1 руб. —  $2\frac{5}{8}\%$  коп. =  $97\frac{1}{8}\%$  коп. Запишемъ снова задачу въ двѣ строки:

вмѣсто 1 руб., учт. за 4 мѣс. до срока, получ.  $97\frac{1}{8}\%$  коп.

» x » » 4 » » » 3597 р. 11 к.

$$x : 1 = 359711 : 97\frac{1}{8}; \text{ откуда } x = \frac{359711 \cdot 6}{583} = 3702 \text{ руб.}$$

Понятно, что теперь  $x$  будетъ во столько разъ больше 1 руб., во сколько разъ 3597 руб. 11 коп. больше  $97\frac{1}{8}\%$  коп. Составивъ пропорцію, получимъ, что  $x$  равенъ 3702 рублямъ.

Такъ рѣшаются всѣ подобныя задачи: предварительно опредѣляютъ цѣну 1 рубля, учтеннаго за данное время до срока, а затѣмъ уже изъ пропорціи находятъ валюту векселя.

**Математическій учетъ.** Такъ какъ при математическомъ учетѣ по той же таксѣ и за то же время до срока учетъ съ даннаго въ задачѣ 4-й векселя составлялъ бы не 104 руб. 89 коп., а 102 руб., то задача 4-я должна имѣть нѣсколько иной видъ: *вексель былъ учтенъ за 4 мѣсяца до срока по  $8\frac{1}{2}\%$ , при чемъ учетъ составилъ сумму въ 102 рубля; какова валюта этого векселя?* Такъ какъ валюта векселя есть сумма цѣны его и учета, то для того, чтобы опредѣлить валюту, опредѣлимъ прежде цѣну, т.-е. узнаемъ, какой капиталъ черезъ 4 мѣсяца принесетъ 102 рубля процентныхъ денегъ, если 1 рубль черезъ 4 мѣсяца принесетъ  $2\frac{5}{8}\%$  коп. прибыли:

съ 1 руб. въ 4 мѣс. получ.  $2\frac{5}{8}\%$  коп.

» x » » 4 » » 10200 »

$$x : 1 = 10200 : 2\frac{5}{8}; \text{ откуда } x = \frac{10200 \cdot 6}{17} = 3600 \text{ руб.}$$

Узнавъ цѣну, прибавимъ къ ней учетъ, что дастъ валюту: 3600 руб. + 102 руб. = 3702 руб.

Пусть теперь въ задачѣ требуется опредѣлить валюту по данной цѣнѣ, т.-е. пусть требуется узнать, *какова будетъ валюта векселя, за который заплатили 3600 руб. при математическомъ учетѣ по  $8\frac{1}{2}\%$  за 4 мѣсяца до срока.* Это значитъ опредѣлить тотъ капиталъ, въ который 3600 руб. обратится черезъ 4 мѣсяца при  $8\frac{1}{2}\%$  таксѣ. Одинъ рубль черезъ 4 мѣсяца обратится въ 1 руб. +  $2\frac{5}{8}\%$  коп. =  $102\frac{5}{8}\%$  коп., и всю задачу мы можемъ записать такъ:

1 руб. въ 4 мѣс. обрат. въ  $102\frac{5}{8}\%$  коп.

3600 » » 4 » » x »

$$x : 102\frac{5}{8} = 3600 : 1; \text{ откуда } x = \frac{617 \cdot 3600}{6 \cdot 1} = 370200 \text{ коп., или } 3702 \text{ руб.}$$



## УПРАЖНЕНИЯ.

Рѣшенія:

1) По векселю за 3 мѣсяца до срока уплачено было 628 руб. съ коммерческимъ учетомъ по  $7\frac{1}{2}\%$ . Определить валюту этого векселя.

1) Учетъ съ 1 рубля за 3 мѣс. до срока составлялъ:  $(7\frac{1}{2} \text{ коп.} : 12) \times 3 = \frac{15.3}{2.12} = 1\frac{1}{2} \text{ коп.}$ , и цѣна 1 руб., учтеннаго за 3 мѣсяца до срока, равнялась: 1 руб. —  $1\frac{1}{2} \text{ коп.} = 98\frac{1}{2} \text{ коп.}$ . А теперь:  $x : 1 \text{ руб.} = 62800 \text{ коп.} : 98\frac{1}{2} \text{ коп.}$ , откуда  $x = \frac{62800.8}{785} = 640 \text{ руб.}$

2) Математическій учетъ съ векселя за  $\frac{3}{4}$  года до срока по  $8\frac{3}{4}\%$  составилъ 125 руб. Определить валюту этого векселя.

2) Учетъ съ 1 рубля за  $\frac{3}{4}$  года до срока составлялъ  $\frac{25}{3} \text{ коп.} \times \frac{3}{4} = \frac{25}{4} \text{ коп.}$ ; слѣдов.,  $x : 1 \text{ руб.} = 12500 \text{ коп.} : \frac{25}{4} \text{ коп.}$  и  $x = \frac{12500.4}{25} = 2000 \text{ рублей.}$

## § 53. Пропорціональное дѣленіе.

И въ торгово-промышленномъ оборотѣ, и вообще въ обиходной жизни человѣка есть еще много другихъ вопросовъ, въ которыхъ мы встрѣчаемся съ пропорціональными величинами, и при разрѣшеніи этихъ вопросовъ весьма удобно пользоваться способомъ пропорцій.

Возьмемъ примѣръ такого рода:

Для исполненія нѣкоторой работы наняли сначала одного работника, спустя три дня—другого и спустя еще день—третьяго. Работа продолжалась всего 12 дней, послѣ чего всѣмъ работникамъ уплачено было 21 руб. 75 коп. Какъ слѣдуетъ раздѣлить эту сумму между работниками, т.-е. кто сколько долженъ получить? Надо полагать, что всѣ работники были одинаковой силы и работоспособности и что плата за каждый рабочій день назначена была всѣмъ имъ одинаковая. Если бѣ, значить, они работали всѣ по равному числу дней, они получили бы и денегъ поровну. Но одинъ работникъ работалъ въ теченіе всѣхъ 12-ти дней; другой, нанятый спустя три дня послѣ перваго, работалъ, очевидно, всего 12 дн.—3 д. = 9 дней; а третій, нанятый днемъ позже втораго, работалъ, слѣдовательно, 9 д.—1 д. = 8 дней всего. Ясно, стало быть, что заработанная ими деньги слѣдуетъ раздѣлить между ними соразмѣрно съ числомъ рабочихъ дней cadaго. Иначе говоря, рабочее время и заработная плата суть величины прямо пропорціональныя, ибо чѣмъ больше дней работалъ рабочій, тѣмъ болѣе онъ получить плату, и, наоборотъ, чѣмъ меньше дней онъ работалъ, тѣмъ меньшую плату онъ получить. Поэтому и во взятомъ нами примѣрѣ деньги слѣдуетъ раздѣлить между рабочими *пропорціонально числу рабочихъ дней cadaго*, т.-е. *сумма, заработанная первымъ работникомъ, должна быть во столько разъ больше суммы, заработанной вторымъ, во сколько разъ число дней, которое работалъ первый (12 дней), больше числа дней, которое работалъ второй (9 дней); также и сумма, заработанная вторымъ, во столько разъ больше суммы, заработанной третьимъ, во сколько разъ число дней, которое работалъ второй (9 дней), больше числа дней, которое работалъ третій (8 дней).*



Если получку первого обозначимъ черезъ I, второго—II, третьяго—III, то мы можемъ написать, что  $I : II = 12 : 9$ , а  $II : III = 9 : 8$ . Иными словами, если первый получить 12 какихъ-либо долей за свою работу, то второй получить такихъ же долей 9; а если второй получить (изъ второй пропорціи) 9 какихъ-либо долей, то третій получить такихъ же долей 8. Предположивъ, что первый получить 12 опредѣленныхъ долей, мы можемъ сказать, что второй получить такихъ долей 9, а третій—8. Мы говоримъ, что деньги должны быть между ними раздѣлены пропорціонально числамъ 12, 9 и 8. И записываемъ это такъ:  $I : II : III = 12 : 9 : 8$ . Надо помнить, что это означаетъ, что первый получилъ 12 долей, второй—9, а третій—8. Всѣ вмѣстѣ получать  $12 + 9 + 8 = 29$  долей. Такъ какъ они всего получили 21 руб. 75 коп., то этимъ 29 долямъ соотвѣтствуетъ

эта сумма, а одной долѣ —  $\frac{2175}{29}$ . Поэтому первый получилъ  $\frac{2175 \cdot 12}{29} = 900$  к. = 9 руб., второй —  $\frac{2175 \cdot 9}{29} = 6$  р. 75 к., а третій —  $\frac{2175 \cdot 8}{29} = 6$  руб.

Какъ въ этомъ примѣрѣ, такъ и вообще, когда требуется раздѣлить какое-либо число на части, которыя относились бы другъ къ другу, какъ какія-нибудь числа, это надо понимать такъ, что число требуется разбить на нѣсколько частей пропорціонально нѣсколькимъ даннымъ числамъ; каждое изъ этихъ чиселъ соотвѣтствуетъ какой-либо искомой части, и каждая искомая часть должна состоять изъ столькихъ долей, сколько единицъ въ соотвѣтствующемъ ей числѣ.

Такое дѣленіе числа на пропорціональныя части называется **пропорціональнымъ дѣленіемъ**, и заключается оно, какъ мы видѣли, въ слѣдующемъ: *число, данное для раздѣленія на части, дѣлать на сумму чиселъ, которымъ должны быть пропорціональны искомыя части, и полученное частное умножаютъ на каждое изъ этихъ чиселъ.*

Пусть намъ теперь дано раздѣлить число 72 на три части такъ, чтобы одна относилась къ другой, какъ 2 относится къ 3-мъ, а другая къ третьей, какъ 3 къ 4-мъ. Какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, для большей наглядности обозначимъ одну искомую часть знакомъ I, другую—II и третью—III и запишемъ отношенія ихъ слѣдующимъ образомъ:

$$I : II = 2 : 3, \text{ и } II : III = 3 : 4.$$

Пропорцію  $I : II = 2 : 3$  надо понимать такъ, что, если въ первой искомой части будетъ какихъ-нибудь долей *два*, то *такихъ же точно* долей во второй части должно быть *три*. Пропорція же  $II : III = 3 : 4$  показываетъ, что, если во второй части будетъ какихъ-нибудь долей *три*, то въ третьей такихъ же долей будетъ *четыре*. Каждая изъ *трехъ долей* второй части, слѣдовательно, равна по величинѣ каждой изъ *двухъ долей* первой части и каждой изъ *четырехъ долей* третьей части: вторая часть, такимъ образомъ, уравниваетъ доли *первой* части съ долями *третьей*, и мы можемъ на этомъ основаніи сказать, что въ первой части содержатся *два* такія же доли, какихъ въ третьей части *четыре*, т.-е. что  $I : III = 2 : 4$ . Теперь мы уже



знаемъ отношенія всѣхъ искомыхъ частей между собой и видимъ, что всѣ состоятъ изъ одинаковыхъ долей, которыхъ въ первой части—2, во второй—3 и въ третьей—4. Отношенія этихъ частей, стало быть, могутъ быть выражены числами 2, 3 и 4, и вмѣсто того, чтобы изобразить отношенія эти тремя отдѣльными пропорціями, мы ихъ сокращенно можемъ изобразить слѣдующимъ образомъ:

$$I : II : III = 2 : 3 : 4.$$

А это значить, что число 72 надо раздѣлить на три части пропорціально числамъ 2, 3 и 4.

Узнавъ, что 72 надо раздѣлить пропорціально 2-мъ, 3-мъ и 4-мъ, раздѣлимъ теперь 72 на сумму этихъ чиселъ, т.-е. на  $2 + 3 + 4 = 9$ , отъ чего получится 8; умножимъ 8 на 2, на 3 и на 4:  $8 \times 2 = 16$ —это первая искомая часть;  $8 \times 3 = 24$ —это вторая искомая часть, и  $8 \times 4 = 32$ —это третья часть.

Въ только что разсмотрѣнномъ примѣрѣ намъ не сразу даны были тѣ числа, пропорціально которымъ требовалось 72 раздѣлить на части; намъ даны были *отдѣльныя* отношенія искомыхъ частей между собой, и изъ этихъ отношеній мы получили ясное представленіе о тѣхъ числахъ, которымъ должны быть пропорціальны искомыя части. Есть, однако, случаи, когда требуется число раздѣлить на части, но при этомъ даются такія *отдѣльныя* отношенія искомыхъ частей, которыя въ такомъ видѣ, въ какомъ они даны, не даютъ возможности опредѣлить тѣ числа, которымъ должны быть пропорціальны искомыя части. Въ такихъ случаяхъ данныя отношенія искомыхъ частей слѣдуетъ предварительно преобразовать, имъ слѣдуетъ придать *иной видъ*. Такъ, пусть число 70 требуется раздѣлить на такія три части, чтобы одна относилась къ другой, какъ 2 къ 3-мъ, а другая къ третьей, какъ 4 къ 5-ти. Обозначимъ искомыя части черезъ I, II и III и изобразимъ ихъ отношенія слѣдующимъ образомъ:

$$I : II = 2 : 3, \text{ и } II : III = 4 : 5.$$

Первую изъ этихъ пропорцій надо понимать такъ, что, если первая искомая часть будетъ содержать какія-нибудь *два* доли, то во второй части такихъ же точно долей будетъ *три*. Вторая пропорція показываетъ, что, если во второй части будетъ какихъ-нибудь долей *четыре*, то такихъ же долей въ третьей части будетъ *пять*. Въ первой пропорціи говорится объ отношеніи *первой части къ второй*, во второй пропорціи говорится объ отношеніи *второй части къ третьей*; намъ осталось, слѣдовательно, опредѣлить отношеніе *первой части къ третьей*,—тогда только мы узнаемъ тѣ числа, которымъ должны быть пропорціальны искомыя части. Но въ первой пропорціи сравниваются двѣ доли первой части съ *тремя долями второй*, а во второй пропорціи сравнивается пять долей третьей части съ *четырьмя долями второй*; такъ какъ каждая изъ трехъ долей второй части не равна каждой изъ четырехъ ея же долей, то, очевидно, и каждая изъ двухъ долей *первой части* не можетъ быть равна каждой изъ пяти долей *третьей части*. А разъ первая и третья части состоятъ изъ разныхъ долей, то и нельзя опредѣлить ихъ отношенія. Вполнѣ понятно, что для того, чтобы опредѣлить отношеніе первой части къ третьей и чтобы,



такимъ образомъ, выяснитъ отношенія всѣхъ искомыхъ частей между собою, слѣдуетъ всѣ три части *выразить въ одинаковыхъ доляхъ*; яснѣе говоря, необходимо, чтобы первая часть состояла изъ такихъ же долей, изъ какихъ составлена вторая, и чтобы изъ тѣхъ же долей состояла и третья часть.

Для этого разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ. Пропорцію  $I : II = 2 : 3$  надо понимать такъ, что, если въ первой искомой части содержатся 2 какія-нибудь доли, то во второй содержится такихъ же долей 3. Но, если эту долю мы раздѣлимъ пополамъ, то такихъ половинокъ въ первой искомой части будетъ 4, а во второй ихъ будетъ 6. И мы можемъ написать, что  $I : II = 4 : 6$ ; въ первой искомой части содержатся теперь 4 другія доли, во второй—6, въ два раза меньшія первыхъ долей. И если изъ первоначальной пропорціи вытекало, что  $\frac{1}{2}$  первой части равнялась  $\frac{1}{3}$  второй, то изъ вновь полученной слѣдуетъ, что  $\frac{1}{4}$  первой равняется  $\frac{1}{6}$  второй. Точно такими же разсужденіями мы придемъ къ такой пропорціи:  $I : II = 8 : 12$ . Если вторая пропорція получилась отъ умноженія членовъ второго отношенія на 2, то третья получилась отъ умноженія на 4. Теперь мы знаемъ, что если въ первой части содержится 8 долей, то во второй содержится такихъ же долей 12. Но эти доли меньше долей предыдущихъ случаевъ. Такими же разсужденіями мы пропорцію  $II : III = 4 : 5$  представимъ въ видѣ  $II : III = 12 : 15$ , умноженіемъ членовъ второго отношенія на 3.

Теперь имѣемъ  $I : II = 8 : 12$ , и  $II : III = 12 : 15$ ; по предыдущему мы можемъ написать  $I : II : III = 8 : 12 : 15$ . Всѣхъ долей будетъ 35 ( $8 + 12 + 15$ ). Одна доля равна  $\frac{70}{35} = 2$ . Слѣдовательно, первая часть равна  $2 \times 8 = 16$ , вторая— $2 \times 12 = 24$ , третья— $2 \times 15 = 30$ .

Итакъ, пропорціи

$$I : II = 2 : 3$$

$$II : III = 4 : 5$$

мы преобразовали такъ: члены второго отношенія первой пропорціи умножили на 4, а члены второго отношенія второй пропорціи помножили на 3. Этимъ мы этотъ случай свели къ первому, уравнивъ числа, набранныя жирнымъ шрифтомъ. Нетрудно понять, что вмѣсто этихъ чиселъ послѣ умноженія получимъ ихъ наименьшее кратное.

Изъ разсмотрѣнныхъ нами примѣровъ видно, что возможны, главнымъ образомъ, три случая пропорціональнаго дѣленія: 1) либо сразу же дается тотъ рядъ чиселъ, пропорціонально которымъ надо раздѣлить данное число: въ этомъ случаѣ данное число прямо дѣлятъ на сумму чиселъ ряда и полученное частное умножаютъ на каждое изъ чиселъ ряда, т.-е. поступаютъ по общему правилу пропорціональнаго дѣленія; 2) либо даются такія отдѣльныя отношенія искомыхъ частей, что одна и та же часть въ разныхъ отношеніяхъ выражена однимъ и тѣмъ же числомъ долей, т.-е. что послѣдующій перваго отношенія равенъ предыдущему второму, послѣдующій второму равенъ предыдущему третьяго и такъ далѣе: въ подобныхъ случаяхъ изъ этихъ отдѣльныхъ отношеній непосредственно находятъ тотъ рядъ чиселъ, пропорціонально которымъ должно раздѣлить данное число,



и затѣмъ уже поступаютъ, какъ въ первомъ случаѣ; 3) либо, наконецъ, даются такія отдѣльныя отношенія искомымъ частей, что одной и той же части въ разныхъ отношеніяхъ соотвѣтствуютъ разныя количества долей: въ такихъ случаяхъ данныя отношенія предварительно преобразовываются такъ, что послѣдующіе однихъ становятся равными предыдущимъ другихъ, и затѣмъ уже, отыскавъ рядъ чиселъ, поступаютъ по общему правилу пропорціональнаго дѣленія; иначе говоря, вопросы третьяго случая приводятся сначала къ вопросамъ второго случая, и затѣмъ уже поступаютъ, какъ въ первомъ случаѣ.

Въ заключеніе скажемъ еще нѣсколько словъ о тѣхъ случаяхъ пропорціональнаго дѣленія, когда числа, пропорціонально которымъ надо раздѣлить данное число, *дробныя* или когда всѣ они имѣютъ какого-нибудь общаго дѣлителя. Пусть требуется какое-либо число раздѣлить на три части пропорціонально числамъ  $1\frac{1}{4}$ ,  $1\frac{1}{2}$  и  $2\frac{1}{2}$ . Это значитъ, что всѣ три искомыя части должны относиться, какъ  $1\frac{1}{4}$ ,  $1\frac{1}{2}$  и  $2\frac{1}{2}$ , т.-е.

$$I : II : III = 1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}.$$

Мы, однако, знаемъ, что дробные члены пропорціи могутъ быть замѣнены цѣлыми безъ всякаго нарушенія пропорціональности. Превратимъ теперь числа  $1\frac{1}{4}$ ,  $1\frac{1}{2}$  и  $2\frac{1}{2}$  въ неправильныя дроби, затѣмъ приведемъ ихъ къ одному знаменателю и, наконецъ, отбросимъ этого общаго знаменателя:

$I : II : III = \frac{5}{4} : \frac{3}{2} : \frac{5}{2}$ , или  $I : II : III = \frac{5}{4} : \frac{6}{4} : \frac{10}{4}$ , или  $I : II : III = 5 : 6 : 10$ , т.-е. вмѣсто того, чтобы данное число раздѣлить пропорціонально числамъ  $1\frac{1}{4}$ ,  $1\frac{1}{2}$  и  $2\frac{1}{2}$ , мы это число можемъ раздѣлить пропорціонально числамъ 5, 6 и 10, и результатъ отъ этого не измѣнится.

Точно также, если числа, пропорціонально которымъ дано раздѣлить какое-либо число, имѣютъ общихъ дѣлителей, то для большей простоты вычисленій весьма полезно числа эти сократить, раздѣливъ ихъ на ихъ общаго дѣлителя. И отъ этого, понятно, результатъ не измѣнится, ибо пропорція не нарушается отъ уменьшенія членовъ отношеній въ одинаковое число разъ. Такъ, если дано какое-либо число раздѣлить на части пропорціонально числамъ 25, 125 и 250, то это значитъ, что искомыя три части должны относиться другъ къ другу, какъ 25 относится къ 125-ти и 250-ти, т.-е.

$$I : II : III = 25 : 125 : 250.$$

Сокративъ 25, 125 и 250 на ихъ общаго дѣлителя 25, мы получимъ:

$$I : II : III = 1 : 5 : 10.$$

Такъ какъ числа, пропорціонально которымъ *теперь* придется раздѣлить данное число на части, меньше предыдущихъ, то и самое дѣленіе будетъ проще и легче.

### УПРАЖНЕНІЯ.

1) Найти четыре числа, сумма которыхъ равна 232, при чемъ первое относится ко второму, какъ 11 къ 12-ти, второе къ третьему, какъ 12 къ 15-ти, и третье къ четвертому, какъ 3 къ 4-мъ.



*Рѣшеніе.* Обозначивъ искомыя числа знаками I, II, III и IV, располагаемъ рѣшеніе такъ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} : \text{II} = 11 : 12 \\ \text{II} : \text{III} = 12 : 15 \\ \text{III} : \text{IV} = 3 : 4 \end{array} \right\} \cdot 5 \quad \left. \begin{array}{l} \text{I} : \text{II} = 11 : 12 \\ \text{II} : \text{III} = 12 : 15 \\ \text{III} : \text{IV} = 15 : 20 \end{array} \right\} \text{I} : \text{II} : \text{III} : \text{IV} = 11 : 12 : 15 : 20.$$

Такъ какъ III во второй пропорціи выражено числомъ 15, а въ третьей—числомъ 3, то второе отношеніе третьей пропорціи надо умножить на 5, ибо общимъ наименьшимъ кратнымъ 15-ти и 3-хъ будетъ 15. Отсюда уже мы находимъ, что число 232 надо раздѣлить на четыре части пропорціонально числамъ 11, 12, 15 и 20:

$$232 : (11 + 12 + 15 + 20) = 232 : 58 = 4; \quad 4 \times 11 = 44 \text{ — это I; } 4 \times 12 = 48 \text{ — это II; } 4 \times 15 = 60 \text{ — это III, и } 4 \times 20 = 80 \text{ — это IV.}$$

2) Найти четыре числа, сумма которыхъ равна 156, при чемъ первое составляетъ  $\frac{1}{3}$  второго, второе —  $\frac{1}{3}$  третьего и четвертое —  $\frac{1}{5}$  перваго.

*Рѣшеніе.* Если первое составляетъ  $\frac{1}{3}$  второго, то это значить, что второе въ 3 раза больше перваго, или, что если первое содержитъ одну какую-либо долю, то второе содержитъ такихъ три доли; слѣдовательно, отношеніе первой части ко второй равно отношенію 1 къ 3-мъ. Такъ же и второе число, которое составляетъ  $\frac{1}{3}$  третьего, относится къ третьему, какъ 1 къ 3-ти. Такимъ образомъ, мы получили пропорціи: I : II = 1 : 3, и II : III = 1 : 3.

Изъ этихъ двухъ пропорцій мы находимъ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} : \text{II} = 1 : 3 \\ \text{II} : \text{III} = 1 : 3 \end{array} \right\} \cdot 3 \quad \left. \begin{array}{l} \text{I} : \text{II} = 1 : 3 \\ \text{II} : \text{III} = 3 : 15 \end{array} \right\} \text{I} : \text{II} : \text{III} = 1 : 3 : 15,$$

т.-е. что первое искомое число состоитъ изъ одной какой-то доли, второе—изъ 3-хъ и третье—изъ 15-ти такихъ же долей. Далѣе мы знаемъ, что четвертое число равно половинѣ перваго: если въ первомъ одна какая-нибудь доля, то въ четвертомъ будетъ  $\frac{1}{2}$  доли.

Итакъ, 156 надо раздѣлить на такія четыре части, чтобы одна состояла изъ одной такой доли, какихъ въ другой—3, въ третьей—15 и въ четвертой— $\frac{1}{2}$ ; иначе говоря, 156 надо раздѣлить пропорціонально числамъ 1, 3, 15 и  $\frac{1}{2}$  или, уничтожая дробь, пропорціонально числамъ 2, 6, 30 и 1:

$$156 : (2 + 6 + 30 + 1) = 156 : 39 = 4; \quad 4 \times 2 = 8 \text{ — это первое число; } 4 \times 6 = 24 \text{ — второе; } 4 \times 30 = 120 \text{ — третье, и } 4 \times 1 = 4 \text{ — четвертое.}$$

Всѣ величины, которыя были нами рассмотрѣны, были пропорціональны другъ другу, точнѣе—прямо пропорціональны другъ другу, но въ ариѳметикѣ встрѣчаются, какъ мы знаемъ, величины и *обратно пропорціональныя*.

Для примѣра рассмотримъ слѣдующую задачу. Одинъ рабочій былъ нанятъ на 30 дней для исполненія опредѣленной работы, по 75 коп. за рабочій день. По прошествіи нѣсколькихъ дней онъ заболѣлъ и вмѣсто него работалъ другой, получавшій по 50 коп. въ день. По окончаніи работы оказалось, что оба получили поровну. Сколько дней работалъ каждый?

Такъ какъ они заработали поровну, то, очевидно, получавшій по 75 коп. работалъ меньше дней, и число дней нужно раздѣлить не пропорціонально 75 и 50, а наоборотъ, т.-е. число дней, которые работалъ I, будетъ относиться къ числу дней, которые работалъ II, какъ 50 : 75. Такое дѣленіе называется обратно пропорціональнымъ. Сокративъ это отношеніе, мы получимъ: I : II = 50 : 75 = 2 : 3. Слѣдовательно, I работалъ  $\frac{30 \cdot 2}{5}$  дней, т.-е. 12 дней, а второй—18 дней. Дѣленіе числа 30 обратно пропорціонально 75 и 50 равносильно дѣленію числа 30 пропорціонально числамъ  $\frac{1}{75}$  и  $\frac{1}{50}$ , такъ какъ  $\frac{\frac{1}{75}}{\frac{1}{50}} = 50 : 75$ .



Вообще, если приходится дѣлить числа обратно пропорціоально даннымъ числамъ, то мы можемъ дѣлить ихъ пропорціоально величинамъ, «обратнымъ даннымъ». Обратными даннымъ числами называются тѣ числа, которыя при умноженіи на данныя числа даютъ единицу, напр.:  $\frac{1}{2}$  есть величина обратная по величинѣ 2;  $\frac{2}{3}$  есть величина обратная по величинѣ  $\frac{3}{2}$  и т. п.

Рѣшимъ такую задачу: раздѣлить число 45 обратно пропорціоально 2, 3 и  $\frac{3}{2}$ .

При рѣшеніи задачи замѣнимъ обратную пропорціоальность прямой, т.-е. раздѣлимъ число 45 пропорціоально  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ :

$$I : II : III = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 3 : 2 : 10; I = \frac{45 \cdot 3}{3 + 2 + 10} = \frac{45 \cdot 3}{15} = 9;$$

$$II = \frac{45 \cdot 2}{15} = 6; III = \frac{45 \cdot 10}{15} = 30.$$

### § 54. Задачи на правило товарищества.

Изложенная нами теорія пропорціоальнаго дѣленія имѣетъ широкое примѣненіе въ ариѳметическихъ задачахъ. Есть много задачъ, которыя весьма удобно рѣшать посредствомъ правила пропорціоальнаго дѣленія; есть и такія задачи, рѣшеніе которыхъ всецѣло основано на пропорціоальномъ дѣленіи. Особенно важно знаніе этого правила при рѣшеніи такихъ задачъ, гдѣ требуется, напримѣръ, раздѣлить прибыль между нѣсколькими участниками какого-либо предпріятія. Всѣ подобныя задачи называются задачами на **правило товарищества**. Соединяется ли нѣсколько капиталистовъ для какого-либо общаго предпріятія, или нѣсколько купцовъ для совмѣстной торговли, или нѣсколько работниковъ для совмѣстнаго труда—все это будутъ *товарищества*. И такъ какъ такихъ всевозможныхъ товариществъ весьма много въ современной жизни, то и нерѣдко представляется необходимымъ рѣшать разнаго рода вопросы, связанные съ товариществами. Посмотримъ, какъ учить ариѳметика разрѣшать подобные вопросы.

Пусть, напримѣръ, три купца соединились для общей торговли; при этомъ одинъ изъ нихъ внесъ 4800 рублей, другой—3600 руб. и третій—2400 руб. По истеченіи года ихъ общее предпріятіе принесло имъ 3600 руб. прибыли. Какъ должны они раздѣлить между собой полученную прибыль? Вполнѣ понятно, что прибыль купцы должны раздѣлить между собой соразмѣрно съ капиталомъ, который каждый изъ нихъ помѣстилъ въ предпріятіе. Если бы они всѣ помѣстили равные капиталы, то и прибыль слѣдовало бы имъ раздѣлить на три равныя части; но такъ какъ капиталы, внесенные каждымъ изъ нихъ, не равны, то и прибыли долженъ получить тотъ больше, кто внесъ большій капиталъ. Если бы каждый изъ купцовъ внесъ по одному рублю, то и прибыли они получили бы поровну; но такъ какъ одинъ внесъ 4800 руб., другой 3600 руб. и третій 2400 руб., то первый долженъ получить 4800 *долей* прибыли, второй—такихъ 3600 долей и третій—2400 долей. Иначе говоря, прибыль должна быть раздѣлена между ними пропорціоально внесеннымъ капиталамъ. Итакъ, чтобы отвѣтить на вопросъ нашей задачи, мы должны 3600 рублей раздѣлить на три части



пропорціонально числамъ 4800, 3600 и 2400. Такъ какъ эти числа имѣють общаго дѣлителя—1200, то мы ихъ можемъ сократить на него, и вмѣсто того, чтобы 3600 руб. раздѣлить пропорціонально числамъ 4800, 3600 и 2400, раздѣлимъ это число пропорціонально числамъ 4, 3 и 2 ( $4800 : 1200 = 4$ ;  $3600 : 1200 = 3$ ;  $2400 : 1200 = 2$ ). Раздѣливъ 3600 руб. на сумму этихъ чиселъ, получимъ:  $3600 \text{ руб.} : (4 + 3 + 2) = 3600 \text{ руб.} : 9 = 400 \text{ р.}$  Умноживъ теперь 400 руб. на 4, получимъ 1600 руб.,—это доля прибыли перваго купца; умноживъ 400 руб. на 3, получимъ 1200 руб.,—это прибыль втораго купца; умноживъ 400 руб. на 2, получимъ 800 руб.,—это прибыль третьяго купца.

Мы предположили, что купцы внесли свои капиталы для общей торговли *одновременно*, и что поэтому всѣ капиталы находились въ предпріятіи въ теченіе *одного и того же времени*. На дѣлѣ, однако, часто случается, что одни изъ участниковъ вступаютъ въ товарищество раньше, другіе—позже, и, слѣдовательно, не всѣ капиталы участвуютъ въ дѣлѣ въ теченіе одного и того же времени. Нетрудно догадаться, что въ такихъ случаяхъ доля прибыли каждаго изъ участниковъ находится въ зависимости не только отъ величины внесеннаго имъ капитала, но еще и отъ продолжительности участія его капитала въ общемъ дѣлѣ: чѣмъ большее время находился капиталъ въ оборотѣ, тѣмъ большая прибыль причитается на него. Пусть тѣ же три купца по истеченіи года совмѣстной торговли получили 3600 р. прибыли, при чемъ только одинъ первый купецъ своимъ капиталомъ въ 4800 руб. участвовалъ въ предпріятіи цѣлый годъ, капиталъ втораго, 3600 руб., находился въ дѣлѣ только 8 мѣсяцевъ, а капиталъ третьяго, 2400 руб.—всего 4 мѣсяца. Какъ должны они въ этомъ случаѣ раздѣлить между собою полученную прибыль?

Понятно, что при опредѣленіи доли прибыли каждаго слѣдуетъ теперь уже принимать во вниманіе не только величину капитала, но и время его участія въ товариществѣ. Если бы это время, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, было одинаковое для всѣхъ, то отдѣльныя доли ихъ въ общей прибыли должны были бы быть пропорціональны внесеннымъ капиталамъ; если бѣ, наоборотъ, внесенные капиталы всѣ были равны, а время нахождения каждаго изъ нихъ въ оборотѣ различно, то доли прибыли должны были бы быть пропорціональны времени. А такъ какъ въ данномъ случаѣ и капиталы различны (4800 р., 3600 р. и 2400 р.), и время участія ихъ въ общемъ дѣлѣ различно (12 мѣс., 8 мѣс. и 4 мѣс.), то прибыль должна быть пропорціональна и капиталамъ и времени, т.-е. искомыя доли прибыли должны относиться между собой, какъ числа 4800, 3600 и 2400 и какъ числа 12, 8 и 4:

$$I : II : III = 4800 : 3600 : 2400$$

$$I : II : III = 12 : 8 : 4.$$

Весь вопросъ теперь заключается въ томъ, чтобы эти два ряда чиселъ преобразовать въ одинъ. Для этого допустимъ, что капиталъ перваго купца находился въ дѣлѣ не 12 мѣсяцевъ, а всего лишь одинъ мѣсяць; также и капиталъ втораго—не 8 мѣсяцевъ, а одинъ, и капиталъ третьяго—не 4 мѣсяца, а одинъ. Такимъ допущеніемъ мы достигаемъ того,



что время нахожденія всѣхъ капиталовъ въ дѣлѣ становится одинаковымъ, и прибыль придется дѣлить пропорціонально только капиталамъ. Но это допущеніе, съ другой стороны, измѣняетъ нашу задачу, ибо въ теченіе одного мѣсяца предпріятіе не могло принести такую же прибыль, какъ въ теченіе года: допуская, стало быть, что капиталы находились въ оборотѣ одинъ мѣсяць, мы вмѣстѣ съ тѣмъ должны измѣнить и данную прибыль. Измѣнить же прибыль мы, опять-таки, не можемъ, ибо данная въ задачѣ сумма прибыли—3600 руб. получена въ теченіе года съ трехъ *различныхъ* капиталовъ, находившихся въ оборотѣ *разное* время. Итакъ, предполагая, что всѣ три купца участвовали въ товариществѣ всего *одинъ мѣсяць*, мы вмѣстѣ съ тѣмъ должны предположить, что предпріятіе дало имъ всѣмъ тѣ же 3600 р. прибыли, и что каждый изъ нихъ на свой капиталъ получилъ такую же прибыль въ мѣсяць, какую онъ долженъ былъ получить въ дѣйствительности. Все это, конечно, вполне возможно было бы, но въ томъ только случаѣ, если бъ капиталы, внесенные каждымъ изъ купцовъ, были больше данныхъ. Такъ, чтобы получить въ мѣсяць ту же прибыль, первый купецъ, деньги котораго были въ предпріятіи въ теченіе года, долженъ былъ бы помѣстить въ предпріятіе не 4800 р., а капиталъ, въ 12 разъ больший, т. - е.  $(4800 \times 12) = 57600$  руб.; второй купецъ, деньги котораго были въ предпріятіи въ теченіе 8-ми мѣсяцевъ, долженъ былъ бы помѣстить не 3600 руб., а въ 8 разъ больше, т.-е.  $(3600 \times 8) = 28800$  руб., а третій купецъ, деньги котораго были въ предпріятіи 4 мѣсяца, долженъ былъ бы помѣстить не 2400 руб., а въ 4 раза больше, т.-е.  $(2400 \times 4) = 9600$  руб. Теперь наша задача уже имѣетъ такой видъ: три купца, составивъ товарищество, по истеченіи мѣсяца получили 3600 руб. общей прибыли, при чемъ первый купецъ внесъ 57600 руб., второй—28800 руб. и третій—9600 руб. Очевидно, что доля прибыли каждаго теперь пропорціональна внесенному капиталу, т.-е.

$$I : II : III = 57600 : 28800 : 9600.$$

Сумму 3600 руб., слѣдовательно, надо раздѣлить пропорціонально числамъ 57600, 28800 и 9600, или (сокративъ ихъ на 9600) числамъ 6, 3 и 1. Раздѣливъ 3600 руб. на сумму этихъ чиселъ и умноживъ полученное частное на каждое изъ нихъ, получимъ:  $3600 \text{ руб.} : (6 + 3 + 1) = 360 \text{ р.}$ ;  $360 \text{ руб.} \times 6 = 2160 \text{ руб.}$ —это доля прибыли перваго купца;  $360 \text{ руб.} \times 3 = 1080 \text{ руб.}$ —доля второго, и  $360 \text{ руб.} \times 1 = 360 \text{ руб.}$ —доля третьяго.

Посмотримъ теперь, въ чемъ заключается то преобразование, которое мы совершили надъ данной задачей, чтобы изъ двухъ рядовъ отношеній образовать только одинъ. Предположивъ, что всѣ три капитала находились въ предпріятіи въ теченіе *одного* мѣсяца, мы такимъ образомъ второй рядъ отношеній *привели къ единицѣ*; затѣмъ мы опредѣлили, что искомыя доли прибыли должны быть пропорціональны числамъ  $(4800 \times 12)$ ,  $(3600 \times 8)$  и  $(2400 \times 4)$ , т.-е. произведеніямъ капиталовъ на соотвѣтствующія числа мѣсяцевъ. Иначе говоря, мы оба ряда отношеній соединили въ одинъ, путемъ перемноженія чиселъ перваго ряда съ соотвѣтствующими имъ числами втораго ряда. Такимъ же точно образомъ поступаютъ во всѣхъ подобныхъ случаяхъ.



Бываютъ задачи, гдѣ данное число требуется раздѣлить пропорціо-  
нально тремъ и даже болѣе рядамъ чиселъ. И въ такихъ случаяхъ задачу  
предварительно преобразовываютъ такъ, что лишніе ряды отношеній при-  
водятся къ единицѣ, и данное число дѣлятъ пропорціоально числамъ одного  
только ряда.

### УПРАЖНЕНІЯ.

1) Три брата получили въ наслѣдство домъ, который приноситъ имъ  
ежегодно 11352 рубля дохода. Весь доходъ они дѣлили между собой пропорціо-  
нально возрасту каждаго. Сколько дохода давалъ домъ каждому изъ братьевъ,  
если число лѣтъ средняго составляло  $\frac{3}{5}$  числа лѣтъ старшаго и число лѣтъ млад-  
шаго составляло  $\frac{2}{5}$  числа лѣтъ средняго?

*Рѣшеніе.* Если число лѣтъ средняго составляло  $\frac{3}{5}$  числа лѣтъ старшаго,  
то это значитъ, что число лѣтъ средняго относилось къ числу лѣтъ старшаго, какъ  
2 относится къ 3-мъ. На томъ же основаніи можно сказать, что лѣта младшаго  
относились къ лѣтамъ средняго, какъ 4 къ 5-ти. Обозначимъ возрастъ старшаго  
брата знакомъ I, возрастъ средняго — II и возрастъ младшаго — III и запишемъ  
теперь отношенія ихъ такъ:

$$\left. \begin{array}{l} I : II = 3 : 2 \\ II : III = 5 : 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} I : II = 15 : 10 \\ II : III = 10 : 8 \end{array} \quad I : II : III = 15 : 10 : 8.$$

Теперь уже для того, чтобы отвѣтить на вопросъ задачи, надо 11352 р. раз-  
дѣлить пропорціоально числамъ 15, 10 и 8; 11352 руб. : (15 + 10 + 8) = 11352 р. :  
33 = 344 руб.; 344 руб.  $\times$  15 = 5160 руб.—это былъ доходъ старшаго брата;  
344 руб.  $\times$  10 = 3440 руб.—это былъ доходъ средняго брата; 344 руб.  $\times$  8 =  
= 2752 руб.—это былъ доходъ младшаго брата.

2) Три работника за исполненіе нѣкоторой работы получили 39 рублей  
60 коп. Одинъ изъ нихъ работалъ 12 дней по 7 часовъ въ день, другой—10 дней  
по 6 часовъ, третій—8 дней по 9 часовъ. Какъ должны они раздѣлить между  
собой заработанныя деньги?

*Рѣшеніе.* Вполнѣ понятно, что деньги должны быть раздѣлены между ними  
пропорціоально числу рабочихъ дней и числу часовъ, т.-е.

$$\begin{array}{l} I : II : III = 12 : 10 : 8 \\ I : II : III = 7 : 6 : 9. \end{array}$$

Если бы каждый изъ нихъ работалъ по одному часу въ день, то, чтобы  
заработать столько же денегъ, первый долженъ былъ бы работать въ 7 разъ больше  
дней, т.-е.: 12 дн.  $\times$  7 = 84 дн.; второй: 10 дн.  $\times$  6 = 60 дней и третій: 8 дн.  $\times$   
 $\times$  9 = 72 дня. Мы, такимъ образомъ, рядъ чиселъ, показывающихъ часы, при-  
вели къ единицѣ, и число 39 руб. 60 коп. теперь уже надо раздѣлить пропорціо-  
нально числамъ 84, 60 и 72 или числамъ 7, 5 и 6.—39 руб. 60 коп. : (7 + 5 + 6) =  
= 39 руб. 60 коп. : 18 = 2 руб. 20 коп.; 2 руб. 20 коп.  $\times$  7 = 15 руб. 40 коп.—  
столько заработалъ 1-й; 2 руб. 20 коп.  $\times$  5 = 11 руб.—столько заработалъ 2-й;  
2 руб. 20 коп.  $\times$  6 = 13 руб. 20 коп.—столько заработалъ 3-й.

### § 55. Задачи на смѣшеніе.

Всѣ почти вещества и предметы, которые имѣются въ продажѣ, из-  
вѣстные подъ именемъ товаровъ, бываютъ разныхъ *сорт*овъ, и, въ зависи-  
мости отъ качества, они имѣютъ разную цѣну, бываютъ дороже и дешевле.  
Такъ, напримѣръ, сукна бываютъ тонкія и грубыя, вина—крѣпкія и сла-  
быя, металлы—ржавѣющіе и нержавѣющіе. Но въ то время, какъ ку-  
сокъ дорогого сукна или шелка никоимъ образомъ не можетъ утратить  
тонкость своей выдѣлки или крѣпость нити, крѣпкое вино, напримѣръ,



можетъ весьма легко потерять свою крѣпость, если его *смѣшать* или, какъ иначе говорятъ, *разбавить* болѣе слабымъ виномъ или водой. Наподобіе вина, и многія другія вещества могутъ быть лишены тѣхъ или иныхъ качествъ путемъ *смѣшенія* ихъ съ другими однородными съ ними веществами. Этимъ широко пользуются въ торговомъ оборотѣ для того, чтобы товары болѣе дорогіе сдѣлать болѣе дешевыми или, наоборотъ, болѣе дешевые сдѣлать болѣе дорогими: весьма часто *смѣшиваютъ* разные сорта муки, кофе, чаю, табаку, *разбавляютъ* крѣпкія вина, *сплавляютъ* разные металлы. Всякія такія смѣшенія получаютъ названіе *смѣсей*; смѣшенія металловъ называются *сплавами*. Какъ цѣнность смѣсей, такъ и цѣнность сплавовъ зависитъ, конечно, отъ *количества* вошедшихъ въ нихъ веществъ и отъ *качества* этихъ веществъ.

Всевозможные вопросы, связанные съ составленіемъ смѣсей и съ ихъ цѣнностью, представляютъ собой **задачи на смѣшеніе**. По смѣшиваемымъ веществамъ мы можемъ раздѣлить всѣ задачи на смѣшеніе на двѣ группы. Къ первой группѣ относятся тѣ задачи, въ которыхъ количества смѣшиваемыхъ или сплавляемыхъ тѣлъ извѣстны; во второй группѣ извѣстнымъ является общее количество смѣси, но неизвѣстно количество каждаго сорта смѣшиваемыхъ веществъ.

*Задачи перваго рода* рѣшаются весьма просто.

Разсмотримъ слѣдующую задачу:

Было смѣшано 10 фунт. кофе по 1 р. 50 к. за фунтъ и 5 фунт. по 1 руб. за фунтъ. Определить стоимость фунта смѣси.

Стоимость всего перваго сорта равна  $1 \text{ р. } 50 \text{ к.} \times 10 = 15 \text{ руб.}$ ; стоимость же всего втораго сорта— $1 \text{ р.} \times 5 = 5 \text{ руб.}$  Стоимость всей смѣси =  $15 \text{ р.} + 5 \text{ р.} = 20 \text{ руб.}$  Количество всей смѣси =  $10 \text{ ф.} + 5 \text{ ф.} = 15 \text{ фун.}$  Стоимость фунта смѣси =  $\frac{20}{15} \text{ руб.} = \frac{4}{3} \text{ руб.} = 1\frac{1}{3} \text{ руб.}$

Къ этому роду задачъ относятся также и задачи слѣдующаго типа. Было смѣшано 3 фунта кофе по 1 р. 25 к. и 5 фунтовъ другаго сорта. Определить стоимость фунта этого сорта, если фунтъ смѣси стоитъ 1 р. 10 к.

Количество всей смѣси было  $3 \text{ ф.} + 5 \text{ ф.} = 8 \text{ фун.}$  Вся смѣсь стоила  $1 \text{ р. } 10 \text{ к.} \times 8 = 8 \text{ р. } 80 \text{ к.}$  Весь первый сортъ стоилъ  $1 \text{ р. } 25 \text{ к.} \times 3 = 3 \text{ р. } 75 \text{ к.}$  Слѣдовательно, весь второй сортъ стоитъ  $8 \text{ р. } 80 \text{ к.} - 3 \text{ р. } 75 \text{ к.} = 5 \text{ р. } 05 \text{ к.}$ , а фунтъ втораго сорта— $5 \text{ р. } 05 \text{ к.} : 5 = 1 \text{ р. } 01 \text{ коп.}$

Въ задачахъ этого рода наиболѣе трудными являются задачи на сплавы.

Изъ случаевъ смѣшенія или *сплава металловъ* особенное вниманіе слѣдуетъ обратить на сплавъ золота и серебра съ другими металлами. Золото и серебро—металлы весьма мягкіе и въ чистомъ видѣ поэтому на разнаго рода издѣлія не употребляются: ихъ обыкновенно сплавляютъ съ нѣкоторыми другими металлами, большей частью съ мѣдью, и изъ этихъ сплавовъ уже выдѣлываются всевозможные предметы. Сплавы эти бываютъ обыкновенно таковы, что на каждыя 96 вѣсовыхъ частей всего сплава приходится то или иное количество частей золота или серебра. *Число, показывающее, сколько частей золота или серебра приходится на 96 вѣсовыхъ частей сплава, называется пробой*. И когда говорятъ: «золото 56-й



пробы» или «серебро 84-й пробы», то это надо понимать такъ, что въ данномъ сплавѣ на 96 вѣсовыхъ частей его приходится 56 частей чистаго золота или 84 части чистаго серебра, т.-е. что, если сплавъ вѣситъ фунтъ (96 золотн.), то золота въ немъ 56 золотн. или серебра 84 золотника; если сплавъ вѣситъ 1 золотн. (96 долей), то золота въ немъ 56 долей или серебра 84 доли; если сплавъ вѣситъ 3 фунта, то въ каждомъ фунтѣ его содержится 56 золотниковъ золота или 84 золотника серебра и т. д. На этомъ основаніи мы можемъ сказать, что проба есть *число золотниковъ чистаго золота или серебра въ фунтѣ сплава или число долей въ золотникѣ сплава*. Замѣтимъ, между прочимъ, что посторонній металлъ, примѣшиваемый къ золоту или серебру, называется *лигатурою*.

**Задача 1.** Сплавили 2 фун. золота 51-й пробы съ  $1\frac{1}{2}$  фун. 72-й пробы. Какой пробы получился сплавъ?

Въ двухъ фунтахъ золота 51-й пробы чистаго золота:  $51 \text{ зол.} \times 2 = 102 \text{ зол.}$ ; въ полутора фунтахъ 72-й пробы чистаго золота:  $72 \text{ зол.} \times 1\frac{1}{2} = 108 \text{ зол.}$

Всего чистаго золота въ сплавѣ, такимъ образомъ, содержится:  $102 \text{ зол.} + 108 \text{ зол.} = 210 \text{ зол.}$

А такъ какъ сплавъ состоитъ изъ 2 фун. +  $1\frac{1}{2}$  фун. =  $3\frac{1}{2}$  фун., то на каждый фунтъ сплава приходится чистаго золота  $210 \text{ зол.} : 3\frac{1}{2} = \frac{210 \cdot 2}{7} = 60 \text{ зол.}$

Это значить, что сплавъ получился 60-й пробы.

Если бы сплавлены были три или болѣе сорта золота разной пробы, то слѣдовало бы, конечно, вычислить количество чистаго золота *всѣхъ* сортовъ и полученное число, опять-таки, раздѣлить на количество всего сплава.

Изъ разсмотрѣнныхъ задачъ мы можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе:

*Первый родъ задачъ на смѣшеніе образуютъ тѣ задачи, въ которыхъ дается:*

1) *количество каждаго изъ двухъ или болѣе смѣшиваемыхъ сортовъ* (пуды, фунты, золотники, ведра),

2) *стоимость или качество единицы каждаго изъ этихъ сортовъ* (рубли, копейки, градусы и проба),

*и требуется опредѣлить—стоимость или качество смѣси.*

Всѣ такія задачи рѣшаются однимъ и тѣмъ же способомъ: узнается *прежде всего стоимость или качество всѣхъ смѣшиваемыхъ сортовъ, затѣмъ опредѣляютъ количество всѣхъ смѣшиваемыхъ сортовъ, и, наконецъ, первое число дѣлятъ на второе.*

Разсмотримъ теперь задачи *второго рода*.

Купецъ смѣшалъ чаю двухъ сортовъ. Фунтъ перваго сорта стоилъ 2 руб. 50 к., а втораго—1 р. 60 к. Всего онъ получилъ 2 п. 10 ф. смѣси стоимостью по 2 руб. за фунтъ. Сколько фунтовъ каждаго сорта вошло въ смѣсь?



Запишемъ условіе задачи въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{array}{l|l|l} \text{I} & 2 \text{ р. } 50 \text{ к.} & \\ \text{II} & 1 \text{ р. } 60 \text{ к.} & 2 \text{ р. } | 90 \text{ фунт.} \end{array}$$

Каждый фунтъ смѣси обошелся самому торговцу въ 2 руб. въ то время, какъ фунтъ чаю высшаго сорта, вошедшаго въ эту смѣсь, ему же стоилъ 2 руб. 50 коп., а фунтъ низшаго сорта— 1 р. 60 к. По сравненію съ стоимостью фунта высшаго сорта стоимость фунта смѣси была *ниже* на: 2 руб. 50 коп.—2 руб. = 50 коп.; по сравненію съ стоимостью фунта низшаго сорта стоимость фунта смѣси была *выше* на: 2 руб.—1 руб. 60 к. = 40 коп.

Очевидно, смѣшавъ высшій сортъ съ низшимъ, торговецъ получилъ чай *средняго* качества, стоившій ему дешевле одного и дороже другого изъ смѣшанныхъ сортовъ, и стоимость фунта смѣси—2 руб.—именно *на столько* была ниже стоимости фунта высшаго сорта и выше стоимости фунта низшаго сорта, что если бы онъ сталъ продавать фунтъ смѣси по такой цѣнѣ, т.-е. по 2 руб., то отъ продажи всей смѣси онъ выручилъ бы то, что ему самому стоилъ чай обоихъ смѣшанныхъ сортовъ, т.-е. не получилъ бы ни прибыли, ни убытка. Однако, продавая смѣсь по 2 руб. за фунтъ, онъ потерялъ бы на фунтѣ высшаго сорта 50 коп. и выигралъ бы на фунтѣ низшаго сорта 40 коп., и если бы онъ для составленія смѣси взялъ по равному количеству фунтовъ того и другого сорта, то отъ продажи всей смѣси онъ имѣлъ бы столько разъ по 50 коп. убытку, сколько разъ по 40 коп. прибыли, т.-е. убытокъ превышалъ бы прибыль. Если же, по его расчету, отъ продажи всей смѣси онъ не долженъ былъ получить ни прибыли, ни убытка, то, очевидно, онъ взялъ для смѣси такое количество каждого сорта, что убытокъ на высшемъ сортѣ покрывался прибылью на низшемъ, т.-е. что тѣ нѣсколько разъ по 50 коп. убытку, которые онъ получить на высшемъ сортѣ, должны были составить такую же сумму, какъ и тѣ нѣсколько разъ по 40 коп. прибыли, которые онъ получить на низшемъ. Такъ какъ *въ одномъ и томъ же числѣ 50 содержится меньшее число разъ, нежели 40*, то для того, чтобы убытокъ на высшемъ сортѣ покрывался прибылью на низшемъ, торговецъ долженъ былъ взять чаю *высшаго сорта меньше, нежели низшаго*, и именно—*меньше* во столько разъ, во сколько разъ 50 больше 40-ка. Число фунтовъ высшаго сорта, такимъ образомъ, *относится* къ числу фунтовъ низшаго, какъ **40** *относится* къ **50-ти** (но не какъ 50 относится къ 40). А теперь уже для того, чтобы опредѣлить количество фунтовъ каждого сорта, надо 2 пуда 10 фун. раздѣлить пропорціонально числамъ 40 и 50 или, сокративъ ихъ на 10, числамъ 4 и 5:

2 п. 10 ф. : (4+5) = 90 фун. : 9 = 10 фун.; 10 фун.  $\times$  4 = 40 фун. было чаю высшаго сорта, и 10 фун.  $\times$  5 = 50 фун. было чаю низшаго сорта.

Рѣшеніе задачи записывается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} 2 \text{ р. } 50 \text{ к.} & 2 \text{ р.} & 90 \text{ фунт.} & - 50 \text{ к.} & \left. \begin{array}{l} \frac{1}{50} \\ \frac{1}{40} \end{array} \right\} \\ 1 \text{ р. } 60 \text{ к.} & & & + 40 \text{ к.} & \\ \hline \text{I} & = & \frac{90 \cdot 4}{9} & = & 40 \text{ фунт.} \\ \text{II} & = & \frac{90 \cdot 5}{9} & = & 50 \text{ фунт.} \end{array} \quad \text{I : II} = \frac{1}{50} : \frac{1}{40} = 4 : 5$$



Итакъ, этотъ способъ рѣшенія задачи основанъ на томъ, что стоимость фунта смѣси меньше стоимости фунта одного сорта и больше стоимости фунта другого, и что поэтому числа 50 и 40, показывающія, на сколько стоимость фунта смѣси ниже стоимости фунта одного и выше стоимости фунта другого сорта, вмѣстѣ съ тѣмъ показываютъ, въ какомъ отношеніи находятся въ смѣси количества фунтовъ обоихъ смѣшанныхъ сортовъ. То обстоятельство, что на фунтѣ высшаго сорта въ сравненіи съ стоимостью фунта смѣси получается 50 коп. убытку, а на фунтѣ низшаго сорта—40 коп. прибыли, говорить о томъ, что количества смѣшанныхъ сортовъ должны относиться другъ къ другу, какъ числа 50 и 40, т.-е. если одного сорта въ смѣси будетъ 50 какихъ-нибудь долей, то другого такихъ же долей должно быть 40. То же обстоятельство, что убытокъ на фунтѣ высшаго сорта больше прибыли на фунтѣ низшаго, т.-е. что *разница между стоимостью фунта высшаго сорта и стоимостью фунта смѣси больше разницы между стоимостью фунта смѣси и стоимостью фунта низшаго сорта*,—уже свидѣтельствуетъ о томъ, что количество фунтовъ высшаго сорта въ смѣси должно быть меньше количества фунтовъ низшаго сорта: 40 долей въ смѣси—высшаго сорта, низшаго же—50 долей. Иначе говоря, количество фунтовъ *каждаго сорта въ смѣси находится не въ прямой пропорціональной зависимости отъ разницы между стоимостью фунта его и фунта смѣси, а въ обратной: того сорта больше въ смѣси, котораго разница меньше, и того меньше, котораго разница больше.*

Разсмотримъ еще одну задачу этого рода.

**Задача 2.** Изъ двухъ слитковъ золота 51-й пробы и 72-й пробы получился сплавъ 60-й пробы, въсомъ въ  $3\frac{1}{2}$  фунта. Сколько золота того и другого качества вошло въ сплавъ?

Въ фунтѣ золота 51-й пробы содержится чистаго золота 51 золотникъ, а въ фунтѣ полученнаго сплава чистаго золота 60 золотниковъ, т.-е. больше на: 60 зол.—51 зол. = 9 зол.

Въ фунтѣ золота 72-й пробы чистаго золота 72 золотника, т.-е. больше, чѣмъ въ фунтѣ полученнаго сплава, на: 72 зол.—60 зол. = 12 зол.

Каждый фунтъ золота 51-й пробы, такимъ образомъ, вносить въ сплавъ на 9 золотниковъ золота меньше того количества, какое необходимо для сплава, а фунтъ второго сорта вносить въ сплавъ на 12 зол. больше, чѣмъ необходимо для сплава. Недостатокъ золота въ первомъ слиткѣ по-полняется избыткомъ его въ другомъ, т.-е. недостатокъ нѣсколькихъ разъ по 9 золотниковъ покрывается избыткомъ нѣкотораго числа разъ по 12 золотниковъ. Но такъ какъ избытокъ больше недостатка, то того золота, на которомъ получается избытокъ въ смѣси, должно быть меньше, нежели того, на которомъ получается недостатокъ, т.-е. количества обоихъ сортовъ должны быть обратно пропорціональны разностямъ, получаемымъ между пробами и пробой смѣси. Слѣдовательно, задача рѣшится такъ:

$$\begin{array}{l} 51 \text{ пр.} \\ 72 \text{ пр.} \end{array} \left| \begin{array}{l} 60 \text{ пр.} \\ 3\frac{1}{2} \text{ фунт.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} + 9 \\ - 12 \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{12} \end{array} \right. \right\} \quad \text{I : II} = \frac{1}{9} : \frac{1}{12} = 4 : 3$$

$$\text{I} = \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 7} = 2 \text{ ф.}; \quad \text{II} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 7} = 1\frac{1}{2} \text{ ф.}$$



Второй родъ задачъ на смѣшеніе образуютъ тѣ задачи, въ которыхъ дается:

- 1) стоимость или качество единицы каждаго изъ двухъ только смѣшиваемыхъ сортовъ,
  - 2) стоимость или качество единицы смѣси,
  - 3) количество всей смѣси,
- и требуется опредѣлить—количество каждаго изъ смѣшанныхъ сортовъ.

Задачи второго рода рѣшаются способомъ пропорціональнаго дѣленія, который основанъ на томъ, что количества обоихъ смѣшанныхъ сортовъ въ смѣси должны относиться другъ къ другу, какъ числа, показывающія разницы между стоимостью или качествомъ единицы каждаго сорта и стоимостью или качествомъ такой же единицы смѣси; при чемъ отношеніе это должно быть таково, что того сорта, разница въ стоимости или качествѣ котораго больше, въ смѣси меньшее количество, а того, разница котораго меньше, въ смѣси больше. Короче говоря, количества обоихъ смѣшанныхъ сортовъ должны быть обратно пропорціональны числамъ, показывающимъ разницы между стоимостью или качествомъ единицы ихъ и стоимостью или качествомъ единицы смѣси.

Если въ задачѣ на смѣшеніе второго рода даны три или болѣе сортовъ, вошедшихъ въ смѣсь, то такая задача неопредѣленная. Такая задача можетъ имѣть нѣсколько отвѣтовъ, и каждый отвѣтъ будетъ удовлетворять задачѣ.

### Повторительные вопросы и отвѣты.

1) Какія величины называются прямо пропорціональными?—Если съ увеличеніемъ одной въ нѣсколько разъ другая увеличивается во столько же разъ или съ уменьшеніемъ одной другая уменьшается во столько же разъ, то такія величины называются прямо пропорціональными.

2) Какія величины называются обратно пропорціональными?—Если съ увеличеніемъ одной другая уменьшается или съ уменьшеніемъ одной другая увеличивается, то такія величины называются обратно пропорціональными.

3) Что такое простое тройное правило?—Способъ рѣшать при помощи пропорцій такія задачи, когда по двумъ даннымъ значеніямъ одной величины и по одному данному значенію другой требуется опредѣлить новое значеніе этой другой величины.

4) Что такое сложное тройное правило?—Способъ рѣшать такія задачи, когда требуется опредѣлить какое-нибудь значеніе величины по данному значенію этой же величины и по даннымъ парамъ значеній нѣсколькихъ другихъ величинъ.

5) Что такое процентъ?—Одна сотая часть всякаго числа.

6) Что значить учеть вексель?—Уплатить по векселю до срока съ вычетомъ процентовъ за оставшееся время.

7) Какая разница между коммерческимъ и математическимъ учетомъ?—Коммерческій учетъ обозначаетъ процентныя деньги за оставшееся до срока время со всей валюты, а математическій обозначаетъ процентныя деньги за то же время и при той же таксѣ съ части валюты.

8) Что такое пропорціональное дѣленіе?—Дѣленіе числа на части, пропорціональныя даннымъ числамъ.



9) Въ чемъ заключается пропорціональное дѣленіе?—Въ дѣленіи числа на сумму данныхъ чиселъ и въ умноженіи полученнаго частнаго на каждое изъ этихъ чиселъ.

10) Что показываютъ *градусы* при опредѣленіи крѣпости спирта?—Число частей чистаго спирта въ ста частяхъ смѣси.

11) Что показываетъ *проба*?—Число золотниковъ чистаго металла въ фунтѣ или число долей металла въ золотникѣ сплава.

12) Какія *задачи на смѣшеніе* называются задачами перваго рода?—Задачи, въ которыхъ даны количества каждаго изъ смѣшиваемыхъ сортовъ и стоимость единицы каждаго сорта и требуется опредѣлить количество смѣси и стоимость единицы смѣси.

13) Какія задачи составляютъ второй родъ?—Задачи, въ которыхъ даны: количество смѣси, цѣна единицы ея и цѣна единицы каждаго сорта и требуется опредѣлить количество каждаго сорта.

14) Какія задачи на смѣшеніе неопредѣленныя?—Задачи втораго рода, въ которыхъ требуется отыскать количества каждаго изъ болѣе, нежели двухъ, сортовъ въ смѣси.

---



# Справочный отдѣлъ.

Таблица первоначальныхъ множителей нечетныхъ чиселъ  
отъ 1 до 499.

	0	100	200	300	400
1	—	—	3·67	7·43	—
3	—	—	7·29	3·101	13·31
5	—	3·5·7	5·41	5·61	3·3·3·3·5
7	—	—	3·3·23	—	11·37
9	3·3	—	11·19	3·103	—
11	—	3·37	—	—	3·137
13	—	—	3·71	—	7·59
15	3·5	5·23	5·43	3·3·5·7	5·83
17	—	3·3·13	7·31	—	3·139
19	—	7·17	3·73	11·29	—
21	3·7	11·11	13·17	3·107	—
23	—	3·41	—	17·19	3·3·47
25	5·5	5·5·5	3·3·5·5	5·5·13	5·5·17
27	3·3·3	—	—	3·109	7·61
29	—	3·43	—	7·47	3·11·13
31	—	—	3·7·11	—	—
33	3·11	7·19	—	3·3·37	—
35	5·7	3·3·3·5	5·47	5·67	3·5·29
37	—	—	3·79	—	19·23
39	3·13	—	—	3·113	—
41	—	3·47	—	11·31	3·3·7·7
43	—	11·13	3·3·3·3·3	7·7·7	—
45	3·3·5	5·29	5·7·7	3·5·23	5·89
47	—	3·7·7	13·19	—	3·149
49	7·7	—	3·83	—	—
51	3·17	—	—	3·3·3·13	11·41
53	—	3·3·17	11·23	—	3·151
55	5·11	5·31	3·5·17	5·71	5·7·13
57	3·19	—	—	3·7·17	—
59	—	3·53	7·37	—	3·3·3·17
61	—	7·23	3·3·29	19·19	—
63	3·3·7	—	—	3·11·11	—
65	5·13	3·5·11	5·53	5·73	3·5·31
67	—	—	3·89	—	—
69	3·23	13·13	—	3·3·41	7·67
71	—	3·3·19	—	7·53	3·157
73	—	—	3·7·13	—	11·43
75	3·5·5	5·5·7	5·5·11	3·5·5·5	5·5·19
77	7·11	3·59	—	13·29	3·3·53
79	—	—	3·3·31	—	—
81	3·3·3·3	—	—	3·127	13·37
83	—	3·61	—	—	3·7·23
85	5·17	5·37	3·5·19	5·7·11	5·97
87	3·29	11·17	7·41	3·3·43	—
89	—	3·3·3·7	17·17	—	3·163
91	7·13	—	3·97	17·23	—
93	3·31	—	—	3·131	17·29
95	5·19	3·5·13	5·59	5·79	3·3·5·11
97	—	—	3·3·3·11	—	7·71
99	3·3·11	—	13·23	3·7·19	—
	0	100	200	300	400

## Составными числами

называются такія, которыя, кромѣ самого себя и единицы, дѣлятся еще и на другое какое-нибудь число.

Въ прилагаемой таблицѣ можно найти первоначальныхъ множителей любого нечетнаго числа. Чтобы найти, напримеръ, первоначальныхъ множителей числа 329, отыскиваемъ числа, находящіеся на пересѣченіи вертикальнаго ряда чиселъ, начинающагося наверху цифрою 300, и горизонтальнаго ряда, начинающагося слѣва цифрою 29.

Эти числа 7·47 и суть первоначальные множители числа 329. Точно также поступаютъ при отысканіи первоначальныхъ множителей другихъ нечетныхъ чиселъ. Если при этомъ приходимъ къ пустому мѣсту, то это означаетъ, что испытуемое число—простое, дѣлящееся только на 1 и на самое себя. Всѣ простые числа, кромѣ 2, нечетныя, но не всѣ нечетныя числа—простыя.

Если нужно отыскать по таблицѣ первоначальныхъ множителей четнаго числа, то слѣдуетъ сначала дѣлить это число на 2 до тѣхъ поръ, пока не получимъ нечетное число, а потомъ лишь искать первоначальныхъ множителей по таблицѣ.

## Примѣры:

Число  $486 : 2 = 243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ .

Слѣдов., первонач. множители числа  $486 = 2.3.3.3.3.3$ .

Число  $1350 : 2 = 675 =$  по табл.  $3.3.3.5.5$ ; первонач. множит.  $= 2.3.3.3.5.5$ .



**Таблица первоначальных множителей нечетных чиселъ  
отъ 501 до 999.**

	500	600	700	800	900
1	3·167	—	—	3·3·89	17·53
3	—	3·3·67	19·37	11·73	3·7·43
5	5·101	5·11·11	3·5·47	5·7·23	5·181
7	3·13·13	—	7·101	3·269	—
9	—	3·7·29	—	—	3·3·101
11	7·73	13·47	3·3·79	—	—
13	3·3·3·19	—	23·31	3·271	11·83
15	5·103	3·5·41	5·11·13	5·163	3·5·61
17	11·47	—	3·239	19·43	7·131
19	3·173	—	—	3·3·7·13	—
21	—	3·3·3·23	7·103	—	3·307
23	—	7·89	3·241	—	13·71
25	3·5·5·7	5·5·5·5	5·5·29	3·5·5·11	5·5·37
27	17·31	3·11·19	—	—	3·3·103
29	23·23	17·37	3·3·3·3·3·3	—	—
31	3·3·59	—	17·43	3·277	7·7·19
33	13·41	3·211	—	7·7·17	3·311
35	5·107	5·127	3·5·7·7	5·167	5·11·17
37	3·179	7·7·13	11·67	3·3·3·31	—
39	7·7·11	3·3·71	—	—	3·313
41	—	—	3·13·19	29·29	—
43	3·181	—	—	3·281	23·41
45	5·109	3·5·43	5·149	5·13·13	3·3·3·5·7
47	—	—	3·3·83	7·11·11	—
49	3·3·61	11·59	7·107	3·283	13·73
51	19·29	3·7·31	—	23·37	3·317
53	7·79	—	3·251	—	—
55	3·5·37	5·131	5·151	5·3·3·19	5·191
57	—	3·3·73	—	—	3·11·29
59	13·43	—	3·11·23	—	7·137
61	3·11·17	—	—	3·7·41	31·31
63	—	3·13·17	7·109	—	3·3·107
65	5·113	5·7·19	3·3·5·17	5·173	5·193
67	3·3·3·3·7	23·29	13·59	3·17·17	—
69	—	3·223	—	11·79	3·17·19
71	—	11·61	3·257	13·67	—
73	3·191	—	—	3·3·97	7·139
75	5·5·23	3·3·3·5·5	5·5·31	5·5·5·7	3·5·5·13
77	—	—	3·7·37	—	—
79	3·193	7·97	19·41	3·293	11·89
81	7·83	3·277	11·71	—	3·3·109
83	11·53	—	3·3·3·29	—	—
85	3·3·5·13	5·137	5·157	3·5·59	5·197
87	—	3·229	—	—	3·7·47
89	19·31	13·53	3·263	7·127	23·43
91	3·197	—	7·113	3·3·3·3·11	—
93	—	3·3·7·11	13·61	19·47	3·331
95	5·7·17	5·139	3·5·53	5·179	5·199
97	3·199	17·41	—	3·13·23	—
99	—	3·233	17·47	29·31	3·3·3·37
	500	600	700	800	900

### Множитель.

Для нахождения **всѣхъ возможныхъ** множителей данного числа дѣлать его послѣдовательно на одного **простого** множителя, частное дѣлать на другого простого множителя до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получатъ 1. Въ указанномъ ниже примѣрѣ нахождения всѣхъ множителей числа 360 первый съ правой стороны черты вертикальный рядъ чиселъ даетъ простыхъ—первоначальныхъ множителей. Перваго изъ этихъ множителей умножаютъ на всѣхъ послѣдующихъ простыхъ, второго множителя на всѣхъ послѣдующихъ простыхъ и составныхъ и т. д. Если между первоначальными множителями встрѣчаются нѣсколько одинаковыхъ, то умножаютъ всѣхъ послѣдующихъ множителей только на послѣдняго изъ равныхъ первоначальныхъ множителей

360	
180	2
90	2, 4
45	2, 4, 8
15	3, 6, 12, 24
5	3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72
1	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180

360 имѣетъ, слѣдовательно, слѣдующихъ первоначальныхъ множителей:

2·2·2·3·3·5

и дѣлится на:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180



1 копейку процентныхъ денегъ въ 1 день дають:

2880	рублей по $\frac{1}{8}\%$	55,38	рублей по $6\frac{1}{2}\%$
1440	» » $\frac{1}{4}$ »	54	» » $6\frac{2}{3}$ »
1080	» » $\frac{1}{3}$ »	53,33	» » $6\frac{3}{4}$ »
720	» » $\frac{1}{2}$ »	51,43	» » 7— »
540	» » $\frac{2}{3}$ »	49,66	» » $7\frac{1}{4}$ »
480	» » $\frac{3}{4}$ »	49,09	» » $7\frac{1}{3}$ »
360	» » 1— »	48	» » $7\frac{1}{2}$ »
288	» » $1\frac{1}{4}$ »	46,96	» » $7\frac{2}{3}$ »
270	» » $1\frac{1}{3}$ »	46,45	» » $7\frac{3}{4}$ »
240	» » $1\frac{1}{2}$ »	45	» » 8— »
216	» » $1\frac{2}{3}$ »	43,64	» » $8\frac{1}{4}$ »
205,71	» » $1\frac{3}{4}$ »	43,20	» » $8\frac{1}{3}$ »
180	» » 2— »	42,35	» » $8\frac{1}{2}$ »
160	» » $2\frac{1}{4}$ »	41,54	» » $8\frac{2}{3}$ »
154,29	» » $2\frac{1}{3}$ »	41,14	» » $8\frac{3}{4}$ »
144	» » $2\frac{1}{2}$ »	40	» » 9— »
135	» » $2\frac{2}{3}$ »	38,92	» » $9\frac{1}{4}$ »
130,90	» » $2\frac{3}{4}$ »	38,58	» » $9\frac{1}{3}$ »
120	» » 3— »	37,90	» » $9\frac{1}{2}$ »
110,76	» » $3\frac{1}{4}$ »	37,24	» » $9\frac{2}{3}$ »
108	» » $3\frac{1}{3}$ »	36,92	» » $9\frac{3}{4}$ »
102,86	» » $3\frac{1}{2}$ »	36	» » 10— »
98,18	» » $3\frac{2}{3}$ »	35,12	» » $10\frac{1}{4}$ »
96	» » $3\frac{3}{4}$ »	34,84	» » $10\frac{1}{3}$ »
90	» » 4— »	34,29	» » $10\frac{1}{2}$ »
84,71	» » $4\frac{1}{4}$ »	33,75	» » $10\frac{2}{3}$ »
83,08	» » $4\frac{1}{3}$ »	33,49	» » $10\frac{3}{4}$ »
80	» » $4\frac{1}{2}$ »	32,73	» » 11— »
77,14	» » $4\frac{2}{3}$ »	32	» » $11\frac{1}{4}$ »
75,79	» » $4\frac{3}{4}$ »	31,77	» » $11\frac{1}{3}$ »
72	» » 5— »	31,30	» » $11\frac{1}{2}$ »
68,57	» » $5\frac{1}{4}$ »	30,86	» » $11\frac{2}{3}$ »
67,50	» » $5\frac{1}{3}$ »	30,64	» » $11\frac{3}{4}$ »
65,45	» » $5\frac{1}{2}$ »	30	» » 12— »
63,53	» » $5\frac{2}{3}$ »	29,39	» » $12\frac{1}{4}$ »
62,61	» » $5\frac{3}{4}$ »	29,19	» » $12\frac{1}{3}$ »
60	» » 6— »	28,80	» » $12\frac{1}{2}$ »
57,60	» » $6\frac{1}{4}$ »	28,42	» » $12\frac{2}{3}$ »
56,84	» » $6\frac{1}{3}$ »	28,23	» » $12\frac{3}{4}$ »



## Вычисленіе процентныхъ денегъ съ помощью предъ- идущей таблицы.

Умноживъ число дней на число капитала въ рубляхъ, получимъ такъ называемое **процентное число**. Раздѣливъ послѣднее на число, соотвѣтствующее въ предыдущей таблицѣ данной процентной таксъ, получимъ процентныя деньги въ копейкахъ.

Напримѣръ, при 4%, 90 рублей даютъ въ день по копейкѣ, и въ такомъ случаѣ слѣдовало бы дѣлить процентныя числа на 90.

### Примѣры:

### Объясненіе:

Сколько процентныхъ денегъ дадутъ:

$$240 \times 142 = 34080$$

142 рубля по 4% въ 240 дней?

$$34080 : 90 = 378 \text{ коп.} = 3,78 \text{ руб.}$$

486 рублей по 5% въ 178 дней?

$$\frac{178 \times 486}{72} = 1201 \text{ коп.} = 12,01 \text{ руб.}$$

970 рублей по 4½% въ 321 день?

$$\frac{321 \times 970}{80} = 38,92 \text{ руб.}$$

124 рубля по 3% въ 70 дней?

$$\frac{70 \times 124}{120} = 72 \text{ коп.}$$

348 рублей по 6% въ 150 дней?

$$\frac{150 \times 348}{60} = 8,70 \text{ руб.}$$



## Т а б л и ц а

для вычисленія числа дней между двумя сроками.

Мѣсяцы, число дней.	Янв. 31	Февр. 28	Мар. 31	Апр. 30	Май. 31	Июнь. 30	Июль. 31	Авг. 31	Сен. 30	Окт. 31	Нояб. 30	Дек. 31
Январь . . . .	365	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Февраль . . .	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Мартъ . . . .	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Апрѣль. . . .	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
Май . . . . .	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
Июнь . . . . .	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
Июль . . . . .	184	215	243	274	304	335	365	31	62	92	123	153
Августъ . . .	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
Сентябрь . . .	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
Октябрь . . .	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
Ноябрь . . . .	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	30
Декабрь . . .	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Въ этой таблицѣ указано число дней въ цѣломъ количествѣ мѣсяцевъ. Если числа (мѣсяца) начального и конечнаго сроковъ не совпадаютъ, то вычисляютъ по таблицѣ число дней за полное количество мѣсяцевъ и къ этому числу дней прибавляютъ, или изъ него вычитываютъ, разность чиселъ (мѣсяца) конечнаго и начального сроковъ, въ зависимости отъ того, будетъ ли число (мѣсяца) конечнаго срока больше или меньше числа (мѣсяца) начального срока.

### П р и м ѣ р ы:

Сколько насчитывается дней отъ 15-го мая до 5-го октября?

Въ первомъ слѣва вертикальномъ столбцѣ таблицы отыскиваемъ слово «май». Въ горизонтальномъ столбцѣ, начинающемся этимъ словомъ, передвигаемъ палецъ слѣва направо, до встрѣчи съ вертикальнымъ столбцомъ, начинающимся словомъ «октябрь». Находимъ число 153. Отъ него вычитываемъ разность чиселъ (мѣсяца)  $15 - 5 = 10$ . Слѣдовательно, между 15-ымъ числомъ мая и 5-ымъ октября 143 дня.

Сколько дней отъ 15-го августа до 25-го февраля?

По таблицѣ число дней за полное количество мѣсяцевъ = 184. Прибавивъ сюда разность  $25 - 15 = 10$  дней, получимъ 194 дня.

Въ високосный годъ надо принять во вниманіе високосный день, если послѣдній входитъ въ рассматриваемый промежутокъ.



Изданіе К-ва „БЛАГО“.

## Академія Иностранныхъ Языковъ для самообученія.



Новая оригинальная система, дающая возможность каждому *легко основательно* изучить, безъ помощи учителя, въ совершенствѣ

**Французскій, нѣмецкій и англійскій языки.**

Лекціи «Академіи Иностранныхъ Языковъ» составлены преподавателями иностранныхъ языковъ Птг. высшихъ учебныхъ заведеній.

Курсъ *каждаго* языка состоитъ изъ 10 выпусковъ большого формата и содержитъ болѣе 1200 страницъ.

Курсъ **НѢМЕЦКАГО** языка составленъ при ближайшемъ участіи и подъ редакціей *приватъ-доцента* Петроградскаго Университета и Педагогической Академіи—Л. Е. Габриловича.

Курсъ **ФРАНЦУЗСКАГО** языка составленъ подъ редакціей *преподавателя французскаго языка* Птг. Политехническаго Института—Г. Пернэ.

Курсъ **АНГЛІЙСКАГО** языка составленъ подъ редакціей члена Королевской Академіи Наукъ—Джона Томсона.

При Редакціи учреждено постоянное бюро, которое руководить занятіями и провѣряетъ присылаемыя учениками «Академіи Иностранныхъ Языковъ» работы бесплатно.

Всѣ выпуски вышли изъ печати.



## Словари „БЛАГО“:

**Французско-Русскій,**

**Англійско-Русскій,**

**Нѣмецко-Русскій,**

содержащіе въ себѣ каждый отъ 750—800 стр. и до 300 иллюстрацій.



Наши словари обладаютъ слѣдующими особенностями:

- а) къ каждому словарю прилагается справочный отдѣлъ, содержащій наиболѣе необходимыя грамматическія свѣдѣнія;
- б) на ряду съ объясненіемъ смысла словъ указывается и произношеніе ихъ;
- в) толкованіе словъ иллюстрируется рисунками въ тѣхъ случаяхъ, когда такія иллюстраціи могутъ способствовать уясненію смысла слова.

Всѣ словари въ мягкихъ коленкоровыхъ переплетахъ.



# Изданія Книгоиздательства „БЛАГО“.

Петроградъ, Глаздовая 18, с. д.

НАИМЕНОВАНИЕ ИЗДАНИЙ.	Колич. выпу- сковъ.
Гимназія на дому . . . . .	30
Пособіе по русскому языку . . . . .	4
Энциклопедія сочиненій . . . . .	1
Темникъ . . . . .	1
Академія иностранныхъ языковъ: англ., франц. и нѣм. (Курсъ нѣмецкаго языка состоитъ изъ 10 выпусковъ).	30
Французская грамматика . . . . .	1
Нѣмецкая грамматика . . . . .	1
Англійская грамматика . . . . .	1
Англійская Хрестоматія . . . . .	1
Искусство для всѣхъ . . . . .	9
Акварель . . . . .	1
Рисованіе углемъ . . . . .	1
Живопись масляными красками . . . . .	1
Очерки по исторіи живописи . . . . .	1
Академія Коммерческихъ знаній . . . . .	15
Банковое Счетоводство . . . . .	2
Бухгалтерія (общее счетоводство) . . . . .	4
Бухгалтерія (спеціальн. виды счетовъ) . . . . .	2
Коммерческая ариометика . . . . .	3
Счетоводство О-ва Потребителей . . . . .	1
Промышленное Счетоводство . . . . .	1
Желѣзнодорожное Дѣло . . . . .	1
Страховое Дѣло . . . . .	1
Банковое Дѣло . . . . .	1
Виріка и биржевыя операціи . . . . .	1
Ученіе о векселяхъ . . . . .	1
Ученіе о финансахъ . . . . .	1
Организація и техника Промыш. и торгов. предпр. . . . .	1
Образцы коммерческихъ документовъ . . . . .	1
Русская корреспонденція . . . . .	1
Французская „ . . . . .	1
Англійская „ . . . . .	1
Нѣмецкая „ . . . . .	1
Народная школа . . . . .	6
Словари: англ.-рус., франц.-рус. и нѣм.-рус. въ пер. . . . .	3
Речь, Упрощенное счисленіе . . . . .	1
Библиотека языкознанія на англ., франц. и нѣм. яз. . . . .	—

Проспектъ и расцѣнка изданій высылаются за 50 коп.

















2007466511